Fortgeschrittenen–Praktikum
Institut für Kernphysik
Γ–Szintillation

Nikolaus Rajewsky   Marcus Rickert

8. September 1991

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbereitung

Mit Hilfe der Quantenmechanik lassen sich die Zustände (Grundzustand und angeregte Zustände) eines Kerns durch Wellenfunktionen beschreiben. Liegt dabei ein Systemen aus mehreren Teilchen vor, so kann dessen Wellenfunktion als Produkt oder Summe der Wellenfunktionen der einzelnen Teilchen aufgefaßt werden. Bei der Kombinbationen der Wellenfunktionen muß sehr genau auf die Kopplung (Wechselwirkungen) zwischen den einzelnen Teichen geachtet werden.

1.1 Quantenzahlen

Als Beispiel für eine Wellenfunktion soll hier die eines einzelnen Teichens der Masse m im Potential V hergeleitet werden. Die beschreibende Schrödingergleichung lautet:

$$\hat{H}\Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi \qquad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})$$

mit Hamilton–Operator $\hat{H}$ und Wellenfunktion Ψ. Die Zustände werden charakterisiert durch die Energie und die Quantenzahlen:

- Gesamtdrehimpuls (j),
- Bahndrehimpuls (l),
- magnetische Quantenzahl (m) und
- Spin (s).

Die *Bahndrehimpuls–Quantenzahl* läßt sich wie folgt herleiten:

$$\hat{L} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i}\hat{\vec{r}} \times \vec{\nabla}.$$

Beim Übergang zu Polarkoordinaten (r, φ, ϑ) erhält man:

$$\begin{aligned}
\hat{L}_x &= i\hbar(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \cos\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}) \\
\hat{L}_y &= i\hbar(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \cos\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}) \\
\hat{L}_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}
\end{aligned}$$

Die Eigenfunktion von $\hat{L}^2$ ergibt sich zu:

$$\hat{L}^2 Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = L^2 Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

Dabei sind $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$ die möglichen *Bahndrehimpuls*–Quantenzahlen und $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ die Kugelfunktionen, die sich aus den Legendre–Polynomen berechnen lassen. Durch die Wahl von Kugelkoordinaten wurde der z–Komponente eine besondere Stellung eingeräumt, denn die Y_{lm} sind automatisch auch Eigenfunktionen zu $\hat{L}_z$:

$$\hat{L}_z Y_{lm} = \hbar m Y_{lm}$$

mit $m = -l, -(l-1), \ldots, (l-1), l$ als mögliche *Magnet*–Quantenzahlen. Jeder Eigenwert $\hbar^2 l(l+1)$ von $\hat{L}^2$ ist also $(2l+1)$–fach entartet.

Den *Spin* eines Teilchens kann man als Ëigendrehimpuls" betrachten. Da der Spin auch ein Drehimpuls ist, gilt hier genau wie beim Bahndrehimpuls die Vertauschungsregel

$$\hat{s}_i \hat{s}_j - \hat{s}_j \hat{s}_i = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{s}_k.$$

Alle Elementarteilchen haben einen definierten Spin: Fermionen haben halbzahligen Spin (z.B. Elektron, Proton, Neutron) und Bosonen haben ganzzahligen Spin (inklusive null, z.B. Photon, Meson). Der Spin hat also für die Drehimpulsquantenzahl $l_s = \frac{1}{2}$ die zugehörigen Magnetquantenzahlen $m_s = \pm\frac{1}{2}$.

Der Gesamtdrehimpuls setzt sich aus der Summe von Bahndrehimpuls und Spin zusammen:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{s}.$$

Somit erhält man für Atomkerne mit $\left\{ \begin{array}{c} \text{ungerad–} \\ \text{gerad–} \end{array} \right\}$ zahliger Nukleonenzahl auch $\left\{ \begin{array}{c} \text{halb–} \\ \text{ganz–} \end{array} \right\}$zahligen Gesamtdrehimpuls. Die *Parität* ist eine Quantenzahl, die die Spiegelungssymmetrie der Wellenfunktion beschreibt, also das Verhalten des Vorzeichens beim Übergang von $\vec{r}$ zu $-\vec{r}$:

$$\Psi(-\vec{r}) = \hat{\Pi}\Psi(\vec{r})$$

Bei doppelten Anwendung des Paritätsoperator $\hat{\Pi}$ muß die Wellenfunktion wieder ihr altes Vorzeichen annehmen:

$$\Psi(\vec{r}) = \hat{\Pi}^2\Psi(\vec{r}),$$

so daß sich die möglichen Eigenwerte zu $\Pi = \pm 1$ ergeben. Betrachtet man zum Beispiel Einteilchenzustände im Zentralpotential, so kann die Schrödinger–Gleichung in einen Radial– und einen Winkelanteil separiert werden. Nur der Winkelanteil hängt von der Spiegelung der Koordinaten ab und wird durch die Kugelflächenfunktionen gelöst. Unter Raumspiegelung ergibt sich dann folgende Eigenschaft:

$$Y_{lm}(\Pi - \vartheta, \varphi + \Pi) = (-1)^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi).$$

Die Lösungen haben (un)gerade Parität für (un)geraden Bahndrehimpuls l. Daraus folgt, daß *gg*–Kerne im Grundzustand gerade Parität haben, da ihr Bahndrehimpuls Null ist. Die Parität ist eine multiplikative Quantenzahl, d.h. bei einem Gesamtsystem von Teilchen multiplizieren sich die Paritäten, im Gegensatz zur additiven Magnetquantenzahl.

1.2 Isomerie

Unter einem *Isomer* versteht man einen Atomkern, der nicht nur im Grundzustand vorkommt, sondern auch anregten Zuständen, die dann Halbswertszeiten von Stunden oder Tagen haben. Dies ist immer dann der Fall, wenn die Spinverhältnisse des Kerns für das angeregte Niveau nur Übergänge sehr hoher Multipolordnung (ab Oktupolordnung) zum Grundzustand erlauben, die selten auftreten und somit der Kern eine sehr hohe Wahrscheinlichkeit für den Verbleib in einem angeregten Zustand besitzt.

1.3 Wechselwirkung von Γ–Quanten mit Materie

Die *Thomson*– und *Compton*–Streunung geschieht mit 'quasifreien' und freien Elektronen, an die ein Teil der Photonenenergie abgegeben wird. Die Bindungsenergie des Elektrons an den Atomkern wird im Vergleich zur Photonenenergie als vernachlässigbar angesehen (deshalb 'quasifrei').

1.3.1 Thomson–Streuung

Die *Thomson–Streuung* findet bei geringeren Photonenenergien als die Compton–Streuung statt. Thomson–Streuung setzt den Wellencharakter der elektromagnetischen Strahlung voraus und führt zur koheränten Streuung. Dabei wird das Elektron durch die Strahlung zur Oszillation angeregt. Die Photonenenergie nach dem Vorgang kann durch die Hertzsche Dipolstrahlung beschrieben werden. Die Bewegungsgleichung des Elektrons lautet:

$$m\ddot{x} = eE = e \underbrace{E_0 \sin \omega t}_{\text{elek.-magn. Feld}} \qquad M = ex.$$

Die Rate, mit der die Elektronen zu oszillieren beginnen, ist proportional zur Intensität des einfallenden Lichts:

$$|S_{in}| = \frac{c}{4\pi} \overline{E_0^2 \sin^2 \omega t} = \frac{c}{8\pi} E_0^2$$

Die emitierte Strahlung ist dann

$$|S_{out}| = \frac{c}{4\pi} \overline{|E'|^2}.$$

Mit der Herzschen Dipolstrahlung erhählt man

$$|E'| = \frac{1}{c^2 r} |\ddot{M}| \sin \Theta = \frac{e}{c^2 r} |\ddot{x} \sin \Theta$$

Mit der zeitlichen Mittelung $\overline{\sin^2 \Theta} = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \Theta)$ ergibt sich schließlich (für unpolarisierte Strahlung)

$$|S_{out}| = \frac{e^4 E_0^2}{16\pi m_e^2 c^3 r^2} (1 + \cos^2 \Theta)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ergibt sich zu:

$$\sigma_{Th} = \frac{|S_{out}|}{|S_{in}|} dA = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{m_e c^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \Theta) d\Omega$$

1.3.2 Compton-Effekt

Der *Compton-Effekt* findet besonders bei Photonenenergien um ca. $1[MeV]$ statt. Man betrachtet dabei den Prozess als inelastischen Stoß zweier Teilchen mit dem Elektron, das vor dem Stoß in Ruhe sei.

Abb.1 Kinetik des Compton-Effektes

Aus der Impulserhaltung beim Stoß folgt, da alle drei Richtungsvektoren in einer Ebene liegen:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar\omega}{c} &= \frac{\hbar\omega'}{c}\cos\Theta_\gamma + p_e\cos\Theta_e && (1) \\ 0 &= \frac{\hbar\omega'}{c}\sin\Theta_\gamma + p_e\sin\Theta_e && (2) \end{aligned}$$

Aus der Energieerhaltung folgt:

$$\hbar\omega = \hbar\omega' + E_{kin} \qquad (3)$$

und der relativistischen Energieformel:

$$\begin{aligned} E_{ges} &= \sqrt{p_e^2c^2 + m_e^2c^4} \\ p_ec &= \sqrt{E_{kin}^2 + 2E_{kin}m_ec^2} && (4) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (1) bis (4) und $\varepsilon = \frac{\hbar\omega}{m_ec^2}$ erhält man für die kinetische Energie des Elektrons

$$\boxed{E_{kin} = \hbar\omega\frac{\varepsilon(1-\cos\Theta_\gamma)}{1+\varepsilon(1-\cos\Theta_\gamma)}}$$

und die Energie des Photons $E'_\gamma = \hbar\omega'$ nach dem Stoß

$$\boxed{E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1+\varepsilon(1-\cos\Theta_\gamma)}}$$

Die Winkel Θ_γ und Θ_e sind verknüpft durch:

$$\cot\Theta_e = (1+\varepsilon)\tan\frac{\Theta_\gamma}{2}$$

Die maximal übertragene Energie auf das Elektron ist genau beim zentralen Stoß mit Rückstoß des Photons erreicht, d.h. $\Theta_\gamma = 180°$ und $\Theta_e = 0°$. Das Elektron hat die dadurch die maximale Energie:

$$\boxed{(E_{kin})_{max} = \frac{2\varepsilon}{1+2\varepsilon}\hbar\omega}$$

Der Compton–Effekt ist ein inkoheränter Streuprozess.

1.3.3 Raleigh–Streuung

Die *Raleigh–Streuung* ist eine allgemeine Form der Compton–Streuung, wobei hier das gebundene Elektron im Atom als Streupartner dient.

1.3.4 Photoelektrischer Effekt

Der *photoelektrische Effekt* findet nur bei gebundenen Elektronen statt. In ca. 80% der Fälle wird dabei durch das Γ–Quant ein Elektron aus der K–Schale ausgelöst, das sich dann entweder mit der Energie

$$E_{kin} = \hbar\omega - (E_B)_K$$

weiterbewegt, wobei $(E_B)_K$ die Bindungsenergie des Elektrons in der K–Schale ist, oder die überschüssige Energie wird dazu verwendet, das Elektron in einen höheren Zustand zu überführen. Für Elektronen, die aus einer anderen Schale emittiert werden, muß die entsprechende Bindungsenergie berücksichtigt werden:

$$\begin{array}{rcll} (E_B)_K & = & R_y(Z-1)^2 & \text{K–Schale} \\ (E_B)_L & = & \frac{1}{4}R_y(Z-5)^2 & \text{L–Schale} \\ (E_B)_M & = & \frac{1}{9}R_y(Z-13)^2 & \text{M–Schale} \end{array}$$

Diese Bindungsenergien tragen auch der Tatsache Rechnung, daß bei abnehmenden Abstand zum Kern die Bindungsenergie zunimmt. Dabei ist $R_y = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = 13.61[eV]$ die Rydberg–Konstante. Demnach hat ein Elektron ein einer höheren Energieschale kleinere Bindungsenergie. Der Photoelektrische Effekt findet bei Photonenenergien bis $0.5[MeV]$ statt.

Wenn man die Absorption gegen die Photonenenegie aufträgt erhält man eine Kurve mit charakteristischen 'Zacken'. Dabei zerfallen die Absorptionslinien der einzelnen Schalen wegen der Feinstruktur in $(2l+1)$ Unterniveaus. Die folgende Abbildung zeigt den Verlauf für das Element Blei:

Abb.2 Photoelektrischer Effekt bei Blei

Außerdem ist noch zu bemerken, daß bei niedrigen Γ–Energien die Elektronen senkrecht zur Einfallsrichtung der Strahlung emmittiert werden. Bei größer werdenden Energien verkleinert sich dieser Winkel, so daß das Elektron zunehmend mehr in die Richtung des einfallenden Strahls emittiert wird.

1.3.5 Paarbildung

Paarbildung findet nur bei elektromagnetischer Strahlung mit Energien größer $1.02[MeV]$ statt. Dabei wandelt sich ein Γ–Quant in ein Elektron–Positron–Paar um. Dieser Effekt ist jedoch nur in der der Nähe eines zusätzlichen Kollisionspartners möglich, damit die Impulserhaltung gewährleistet ist. Ist die Photonenenergie größer als die Ruhemassen von Elektron und Position ($1.02[MeV]$) so steht die restliche Energie den Teilchen als Bewegungsenergie zur Verfügung.

$$E_{paar} = E_{kin} + 2m_e c^2 = 2\gamma m_e c^2$$

Der Impuls beträgt für Elektron und Positron:

$$p_{paar} = 2\gamma m_e v = E_{paar}\frac{v}{c^2} \Longrightarrow \boxed{E_{paar} = p\frac{c^2}{v}} \tag{5}$$

Für das Photon gilt:

$$E_\gamma = \hbar\omega \quad , \quad p_\gamma = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{E_\gamma}{c} \qquad \Longrightarrow \boxed{E_\gamma = p_e c} \tag{6}$$

Somit gilt bei Energieerhaltung mit (5 und 6)

$$\begin{aligned} E_{paar} &= E_\gamma \\ \Longrightarrow p_\gamma c &= p_{paar}\frac{c^2}{v} \\ \Longrightarrow p_{paar} &= p_\gamma \frac{v}{c} \quad < \quad p_\gamma \end{aligned}$$

Also wird bei diesem Prozess ein Teilchen benötigt, daß den Impuls $p = p_\gamma\left(\frac{c-v}{c}\right)$ aufnimmt. Dabei kann sowohl ein Nukleon als auch ein Elektron der Kollisionspartner sein. Jedoch ist die Rückstoßenergie beim Proton, aufgrund der größeren Masse kleiner als beim Elektron. Für die Schwellenenergie gilt:

$$E = 2m_e c^2\left(1 + \frac{m_e}{M}\right)$$

wobei M die Masse des Kollisionspartners ist. Demnach benötigt man mindestens die Photonenenergie $E_\gamma \geq 2.04[MeV]$, damit ein Elektron als Kollisionspartner in Frage kommt im Gegensatz zu $E_\gamma \geq 1.02$ beim Proton.