Fortgeschrittenen–Praktikum
2. Physikalisches Institut
Seminar–Material
Versuch 21
Mikrowellen

Marcus Rickert Eike Ulbrich

25. November 1990

Mikrowellen

Alonso Finn 578

Abb.1 Elektromagnetisches Spektrum

1 Erzeugung von Mikrowellen

2 Wellenausbreitung in Hohlleitern

3 Dielektrizitätskonstante

4 Anwendung

4.1 Bestimmung der DK einiger Kunststoffe

4.2 Radarkontrolle durch Doppler–Effekt

5 Impatt-Diode (Lawinenlaufzeitdiode)

Impact–Avalanche–Transit–Time–Diode

Bild 93

Abb.2 Schema

4.4.2 Bild 92

Abb.3 p^+nn^+–Impatt-Diode

Bild 98

Abb.4 Spannung und Strom

Erzeugung von Mikrowellen

Leistungskurve des Generators

Versuchsaufbau

Theorie der Hohlleiter

$$\nabla \vec{E} = 0 \qquad \nabla \vec{H} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = -i\omega \dot{\vec{H}} \qquad \nabla \times \vec{H} = \frac{i\omega}{c^2} \dot{\vec{E}}$$

Wellengleichung

$$\triangle \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0.$$

Ansatz

$$\vec{H}(x, y, z) = \vec{H}_0(x, y) \mathrm{e}^{-\gamma z}$$

Zerlegung

$$\triangle \vec{H} = \triangle_{tr} \vec{H} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{H} \qquad \vec{H}_0 = \vec{H}_{0tr} + H_{0z} \vec{e}_z$$

Neue Wellengleichung

$$\triangle_{tr} H_{0z} + (\gamma^2 + k_{tr}^2) H_{0z} = 0$$

$$\vec{H} = \left(-\frac{\gamma}{\gamma^2 + k_{tr}^2} \nabla_{tr} H_{0z} + H_{0z} \vec{e}_z \right) \mathrm{e}^{-\gamma z}$$

Grenzwellenzahl

$$h^2 := \gamma^2 + k_{tr}^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma = \sqrt{h^2 - k_{tr}^2}$$

Hohlleiter–Wellenlänge

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}} = \frac{\nu}{c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}}$$

Moden

Ansatz

$$H_{0z}(x,y) = f(x)g(y)$$

$$\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f + \frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}g + (\gamma^2 + k_{tr}^2) = 0$$

Randbedingungen

$$E_{0z}|_{x=0} = E_{0z}|_{x=a} = E_{0z}|_{y=0} = E_{0z}|_{y=b} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}H_{0z}\Big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x}H_{0z}\Big|_{x=a} = \frac{\partial}{\partial y}H_{0z}\Big|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial y}H_{0z}\Big|_{y=b} = 0$$

Lösung

$$\begin{aligned} g &= A\sin(c_1 x) + B\cos(c_1 x) \\ f &= \tilde{A}\sin(c_2 x) + \tilde{B}\cos(c_2 x) \end{aligned}$$

Bestimmungsgleichung für h

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = {c_1}^2 + {c_2}^2 = k_{tr}^2 + \gamma^2 = h^2$$

Grenzwellenlänge im Hohlleiter

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{h} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \qquad (= 2a)$$

Messung der Hohlleiter–Wellenlänge

Versuchsaufbau

Tabelle 1 Hohlleiter–Wellenlänge

	Einheit	$\nu = 9450 \pm 2.5 \quad [MHz]$	$\nu = 9550 \pm 2.5 \quad [MHz]$
λ_0	[mm]	31.72 ± 0.08	31.39 ± 0.08
λ_c	[mm]	45.72	45.72
λ_g theor.	[mm]	44.06 ± 0.04	43.18 ± 0.04
λ_g gemess.	[mm]	44.1 ± 2	43.4 ± 2

Impedanz (Theorie)

Anleitung Seite 9

Abb.5 Stehende Wellen

Impedanz

$$Z_{HF} = \frac{|\vec{E}_{tr}|}{|\vec{H}_{tr}|} = Z_F \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}} \qquad \text{mit} \quad Z_F = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

Ansatz

$$\vec{E} = \vec{E}_t \mathrm{e}^{i\beta z} + \vec{E}_r \mathrm{e}^{-i\beta z} \qquad \vec{H} = \vec{H}_t \mathrm{e}^{i\beta z} - \vec{H}_r \mathrm{e}^{-i\beta z}$$

$$Z(z) = Z_{0g} \left(\frac{\mathrm{e}^{i\beta z} + \delta \mathrm{e}^{-i\beta z}}{\mathrm{e}^{i\beta z} - \delta \mathrm{e}^{-i\beta z}} \right)$$

Bei Kurzschluß ($\delta = -1$)

$$Z(z) = Z_{0g} i \tan(\beta z) = Z_{0g} i \tan\left(\frac{2\pi z}{\lambda_g}\right)$$

Smith'sches Diagramm

Impedanz

$$Z(z) = Z_{0g} \frac{1 - \delta \mathrm{e}^{-2i\beta z}}{1 + \delta \mathrm{e}^{-2i\beta z}}$$

Stehwellenverhältnis

$$s = \frac{U_{max}}{U_{min}} = \frac{1 + |\delta|}{1 - |\delta|} \qquad \Rightarrow \qquad |\delta| = \frac{s - 1}{s + 1}$$

Zerlegung

$$\frac{Z_{H_F}}{Z_F} := r + ix \qquad \delta \mathrm{e}^{-2i\beta z} = u + iv$$

Kreisgleichungen

$$\left(u - \frac{r}{1 + r}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{(1 + r)^2}$$

$$(u - 1)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$$

Impedanzmessung

Versuchsaufbau

Tabelle 2 Meßergebnisse

Größe	Einheit	4 [mm]	7.98 [mm]
λ_g	[mm]	42.9 ± 2	43.7 ± 2
z_{min}	[mm]	108.7 ± 1	101.1 ± 1
z_{min0}	[mm]	1.45 ± 1 !!!	13.7 ± 1
U_{max}	[mV]	14.8 ± 0.4	$ca.4 \pm 1$
U_{min}	[mV]	1.38 ± 0.4	$ca.0$
SWR	[1]	30.7 ± 3.1	∞
$\frac{\lambda_{min0}}{\lambda_g}$	[1]	0.034 ± 0.024 !!!	0.314 ± 0.024
$\frac{R}{Z_{0g}}$	[1]	0.1 ± 0.069	0
$\frac{X}{Z_{0g}}$	[1]	-0.22 ± 0.15	2.3 ± 0.17
Z	[Ω]	$52(\pm 36) - i113(\pm 78)$	$i1190(\pm 91)$

Dielektrizitätskonstante ϵ_r

Kittel S.428 Bild 8

Abb.6 Frequenzabhängigkeit der Polarisierbarkeit

Im Vakuum: $\epsilon_r = 1$, in Materie $\epsilon_r > 1$

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E$$

Zusammenhang mit Polarisierung

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e \qquad \chi_e = \frac{P}{E} \qquad P = P(E, T, \omega)$$

Harmonischer gedämpfter Oszillator

$$\ddot{\vec{p_n}} + \Gamma_n \dot{\vec{p_n}} + {\omega_n}^2 \vec{p_n} = b_n \vec{E}_0 \mathrm{e}^{-i\omega t}$$

$$\vec{p_n}(t) = \vec{p}_{0n} \mathrm{e}^{-i\omega t} \qquad \vec{p}_{0n} = \frac{b_n}{({\omega_n}^2 - \omega^2) - i\Gamma_n \omega} \vec{E}_0$$

$$\vec{P_{ges}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{({\omega_n}^2 - \omega^2) - i\Gamma_n \omega} \vec{E}_0$$

Polarisation in Frequenzabhängigkeit

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{({\omega_n}^2 - \omega^2) - i\Gamma_n \omega} \vec{E}_0$$

DK-Messung im vollständig gefüllten Hohlleiter

AnleitungSeite 6

Abb.7 Vollständig gefüllter Hohlleiter

$$\frac{Z_{0g0}}{Z_{0g\epsilon}} = \frac{\lambda_{g0}}{\lambda_{g\epsilon}}$$

$$Z_{ohne}(L+d) = Z_{mit}(L)$$

$$\frac{\tan\left(\frac{2\pi(d+L)}{\lambda_{g0}}\right)}{\frac{2\pi L}{\lambda_{g0}}} = \frac{\tan\left(\frac{2\pi L}{\lambda_{g\epsilon}}\right)}{\frac{2\pi L}{\lambda_{g\epsilon}}} := \frac{\tan(x)}{x}$$

Ergebnis

$$er = \left(\left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^2\right)\frac{\lambda_0^2}{4\pi^2}$$

DK-Messung im vollständig gefüllten Hohlleiter

Versuchsaufbau

Tabelle 3 Meßergebnisse

Material	L [mm]	d [mm]	$\lambda_{g\epsilon}$ [mm]	ϵ_r [1]	Lit.
Teflon	8.8 ± 0.1	9.17 ± 1	23.8 ± 2.5	2.2 ± 0.3	2.0
PVC	7.9 ± 0.1	10.7 ± 1	20.6 ± 2.1	2.8 ± 0.5	
Plexiglas	10.0 ± 0.1	10.9 ± 1	21.2 ± 2.8	2.6 ± 0.6	
Polystyrol	10.2 ± 0.1	10.7 ± 1	21.4 ± 2.8	2.6 ± 0.6	$2.3 \ldots 2.5$
Araldit	10.0 ± 0.1	11.5 ± 1	20.0 ± 2.7	2.9 ± 0.7	
Pertinax	10.2 ± 0.1	13.4 ± 1	16.9 ± 1.8	3.9 ± 0.7	$3.5 \ldots 5.5$
Holz $\parallel$	9.9 ± 0.1	10.7 ± 1	21.9 ± 2.8	2.5 ± 0.5	
Holz $\perp$	10.0 ± 0.1	10.3 ± 1	22.3 ± 2.8	2.4 ± 0.5	

DK-Messung im freien Raum

Phasenverschiebung durch Platte

Gesetz von Snellius

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = n$$

Gangunterschied $\leftrightarrow$ Phasenverschiebung

$$\frac{g}{\lambda} = \frac{\phi}{2\pi}$$

Phasenverschiebung

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{nd}{\cos(\beta)} - \frac{d}{\cos(\beta)}\cos(\alpha-\beta)\right)$$

Ergebnis

$$\epsilon_r = n^2 = (\frac{\lambda\phi}{2\pi d} + \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha$$

Im Experiment ($\alpha = 45°$)

$$\epsilon_r = \left(\frac{c_0\phi}{2\pi\nu d} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

DK-Messung im freien Raum

Versuchsaufbau

Tabelle 4 Meßergebnisse

Material	$\Delta\phi[2\pi]$	$d[mm]$	ϵ_r	Literatur
Polystyrol	2.18 ± 0.17	10.1 ± 0.1	3.7 ± 0.3	$2.3 \ldots 2.5$
Plexiglas	2.36 ± 0.17	11.8 ± 0.1	3.4 ± 0.2	
Pertinax	2.71 ± 0.17	9.6 ± 0.1	5.2 ± 0.4	$3.5 \ldots 5.5$
Trovidur	1.92 ± 0.17	7.7 ± 0.1	4.2 ± 0.4	

Doppler

Versuchsaufbau

Frequenzverschiebung

$$\nu_D \cong \nu \left(1 - \frac{v}{c_0}\right)^2 \cong \nu \left(1 - 2\frac{v}{c_0}\right)$$

Schwebungsfrequenz

$$\nu_{Schwebung} = \frac{\nu - \nu_D}{2}$$

Geschwindigkeit des Autos

$$v = c\frac{\nu_{Schwebung}}{\nu}$$