Fortgeschrittenen–Praktikum
Institut für Kernphysik
Versuch Nr.11 'β–Szintillation'
am 13.12.1989

Nikolaus Rajewsky Marcus Rickert

5. März 1992

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbereitung

1.1 β–Zerfall

Als β–Zerfall bezeichnet man jeden Zerfall, bei dem sich die Kernladungszahl Z um eine Einheit ändert, die Massenzahl A jedoch konstant bleibt. Man unterscheidet drei Arten:

- *β^-–Zerfall:* Der Kern emittiert ein Elektron. Dabei wandelt sich ein Neutron in ein Proton um. Die Kernladungszahl steigt von Z auf $Z+1$. Zusätzlich entsteht ein Neutrino.

  $$\boxed{n \quad \longrightarrow \quad p \quad + \quad e^- \quad + \quad \bar{\nu}_e}$$

  Die Reaktionsenergie beträgt:

  $$\begin{aligned} \Delta E &= \left((m(Z,A) - Zm_e) - (m(Z+1,A) - (Z+1)m_e) - m_e\right)c^2 \\ &= (m(Z,A) - m(Z+1,A))c^2 \end{aligned}$$

- *β^+–Zerfall:* Der Kern emittiert ein Positron, wodurch die Kernladungszahl von Z auf $Z-1$ sinkt.

  $$\boxed{p \quad \longrightarrow \quad n \quad + \quad e^+ \quad + \quad \nu_e}$$

  Die Zerfallsenergie beträgt:

  $$\begin{aligned} \Delta E &= \left((m(Z,A) - Zm_e) - (m(Z-1,A) - (Z-1)m_e) - m_e\right)c^2 \\ &= (m(Z,A) - m(Z-1,A) - 2m_e)c^2 \end{aligned}$$

- *Elektroneneinfang:* Der Kern absorbiert ein Elektron, vorzugsweise aus der K–Schale, deren Elektronen die größte Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Kern haben. Die Kernladungszahl sinkt von Z auf $Z-1$.

  $$\boxed{p \quad + \quad e^- \quad \longrightarrow \quad n \quad + \quad \nu_e}$$

  Die Zerfallsenergie beträgt:

  $$\begin{aligned} \Delta E &= \left((m(Z,A) - Zm_e) - (m(Z-1,A) - (Z-1)m_e) + m_e\right)c^2 \\ &= (m(Z,A) - m(Z-1,A))c^2 \end{aligned}$$

Da die Elektronen (aus Symmetriegründen in der β–Spektroskopie auch manchmal als *Negatronen* bezeichnet) und Positronen, die beim β–Zerfall entstehen, ein kontinuierliches Energiespektrum ergeben und nicht die ganze Zerfallsenergie haben, muß ein zusätzliches Teilchen entstanden sein, das die restliche Energie aufnimmt. Aus Massen–, Spin– und Ladungserhaltungsgründen muß dies ein Teilchen sein, welches keine Ladung, keine Ruhemasse (dies ist heute noch umstritten), kein magnetisches Moment und Spin $\frac{1}{2}$ besitzt. Es wurde aufgrund seiner neutralen Eigenschaften *Neutrino* getauft.

Aus den Energiedifferenzen für die drei verschiedenen Zerfallsarten erkennt man, daß β^-–Zerfall und Elektroneneinfang stattfinden kann, wenn die Masse des Mutterkerns größer als die des Tochterkerns ist. Beim β^+–Zerfall hingegen muß die Masse des Mutterkerns um mindestens $2m_e = 1.022[MeV]$ größer sein als die des Tochterkerns. Da β^+–Zerfall und Elektroneneinfang auf die gleichen Tochterkerne führen, sind die beiden Prozesse konkurrierend (wenn mindestens der oben erwähnte Massenunterschied von $2m_e$ besteht).

Der β–Zerfall führt sehr oft zu einem angeregten Zustand des Kerns, deshalb beobachtet man zusätzliche Konversionselektronen oder Γ–Quantenemission beim Übergang in den Grundzustand. Beim Elektroneneinfang beobachtet man auch Röntgenemission oder Auger–Elektronen, die durch das Wiederauffüllen des fehlenden Elektrons in der K–Schale durch ein Elektron aus einer höheren Schale entstehen.

1.2 Bindungsenergien des Kerns, Tröpfchenmodell

Das Tröpfchenmodell beruht auf der Überlegung, daß man den Kern als ein Flüssigkeitströpfchen einer inkompressiblen Flüssigkeit betrachten kann. Für die Bindungsenergie eines Kerns mit Nuleonenzahl A und Kernladungszahl Z ergibt sich:

$$\boxed{B = \underbrace{a_v A}_{1} - \underbrace{a_s A^{\frac{2}{3}}}_{2} - \underbrace{a_c Z^2 A^{-\frac{1}{3}}}_{3} - \underbrace{a_A (Z - A/2)^2 A^{-1}}_{4} \underbrace{\pm\delta}_{5}} \tag{1}$$

Bei den Größen a_V, a_S, a_C, a_A handelt es sich um empirisch zu ermittelnde Konstanten. Die Terme 1-5 werden im folgenden kurz erläutert.

1. Die *Volumenenergie* ist die 'Kondensationsenergie', die frei wird, wenn sich die Nukleonen zum Kern vereinigen. Sie muß proportional zur Anzahl der Teilchen sein.

2. Die *Oberflächenenergie* muß subtrahiert werden, da Teilchen, die sich an der Oberfläche des Kerns befinden, weniger Bindungspartner haben als die Teilchen im Innern des Kerns. Der Term ist damit proportional zur Kernoberfläche $4\pi R^2 = 4\pi r_0^2 A^{\frac{2}{3}}$.

3. Die *Coulombenergie*, die zwischen den Protonen wirkt, muß subtrahiert werden. Man setzt eine elektrostatische Energie mit homogener Ladungsverteilung der Form $W = \frac{1}{8\pi}\int E^2 d^3x$ an. Für eine Kugel ergibt sich $W = \frac{3}{5}\frac{Q_{ges}}{R}$ mit $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$.

4. Die *Asymmetrieenergie* berücksichtigt, daß bei Neutronenüberschuß eine Verringerung der Bindungsenergie gegenüber dem symmetrischen Kern eintritt.

5. Die *Paarungsenergie* ist nicht mithilfe des Flüssigkeitsmodell zu erklären und muß als empirische Korrektur hinzugefügt werden. Sie beruht auf der Erfahrung, daß gepaarte Nukleonen derselben Sorte stets eine besonders hohe Bindung bewirken. Die Paarungsenegie ist

$$B_P = \begin{cases} +\delta & \text{für } gg\text{–Kerne} \\ 0 & \text{für } ug\text{– und } gu\text{–Kerne} \\ \delta & \text{für } uu\text{–Kerne} \end{cases}$$

wobei der erste Buchstabe (g oder u) für eine gerade bzw. ungerade Anzahl von Protonen und der zweite Buchstabe für eine gerade bzw. ungerade Anzahl von Neutronen steht.

Für die Atommasse ergibt sich dann insgesamt:

$$m(Z,A) = Zm_H + (A-Z)m_N - \frac{1}{c^2}B$$

Durch Einsetzen von (1) ergibt sich die *Weizsäckersche Massenformel*:

$$\boxed{m(Z,A) = Zm_H + (A-Z)m_N - a_V A + a_S A^{\frac{2}{3}} + a_C Z^2 A^{-\frac{1}{3}} + a_A (Z - A/2)^2 A^{-1} \pm \delta}$$

1.3 Paarungsenergie der Isobaren

Wenn man nun den β–Zerfall untersuchen möchte, muß man die Atommasse in Abhängigkeit der Kernladungszahl bei konstanter Nukleonenzahl betrachten. Man sieht sofort, daß es sich um Parabeln handelt, da Z maximal als quadratischer Form vorkommt. Entscheidend ist nun die Paarungsenergie, in deren Abhängigkeit man zwei Fälle unterscheidet:

- bei ungerader Nukleonenanzahl liegt entweder ein gu– oder ein ug–Kern vor, so daß die Paarungsenergie null ist. Beim β–Zerfall geht dabei ein gu–Kern in einen ug–Kern über und umgekehrt, so daß nach der Reaktion die Paarungsenergie ebenfalls null ist. Dies hat zur Folge, daß sowohl der Mutterkern als auch der Tochterkern auf der gleichen Parabel liegen (siehe Abb.1a). Man erkennt weiterhin, daß auf dem linken Ast der Parabel nur β^-–Zerfall möglich sind und auf der rechten Seite nur β^+–Zerfall. Es gibt nur ein stabiles Isobar, nämlich das, das den Scheitelpunkt der Parabel bildet.

- bei gerader Nukleonenanzahl liegt entweder ein gg– oder ein uu–Kern vor, die beide unterschiedliche Paarungsenergien haben. Beim β–Zerfall geht dabei ein uu–Kern in einen gg–Kern über, sodaß Mutter– und Tochterkern auf unterschiedlichen Parabeln liegen (siehe Abb.1b). Hier sind auf beiden Seiten der Parabeln beide Arten des Ubergangs möglich. Außerdem erkennt man, daß es unter Umständen mehrere stabile Isobare gibt (alle Isobare der gg–Parabel, die unterhalb des Minimums der uu–Parabel liegen).

Abb.1 Atommassen bei Isobaren (a) ungerades Z (b) gerades Z

Für das Minimum Z_0 folgt in beiden Fällen:

$$\frac{\partial}{\partial Z} m \bigg|_A \stackrel{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad Z_0 = \frac{A}{2} \frac{m_N - m_H + a_A}{a_C A^{\frac{2}{3}} + a_A}$$

Die stabilsten Kerne sind also diejenigen, die möglichst nahe an Z_0 liegen.

1.4 Konkurrierende Effekte

Dem kontinuierlichen Spektrum der Elektronen oder Positronen, das beim β–Zerfall entsteht, überlagern sich oft Linien mit scharfer Energie, so daß man folgende Gestalt erhält:

Abb.2 β–Spektrum mit Peaks von Auger– und Konversionselektronen

Die Peaks stammen von den folgenden beiden Effekten:

1.4.1 Konversionselektronen

Nach β–Zerfällen liegt der Kern oft in einem angeregten Zustand vor. Durch Emission von Γ–Quanten oder durch elektromagnetische Wechselwirkung mit Hüllenelektronen kann er seine Anregungsenergie abgeben, um in den Grundzustand überzugehen. Ist sie groß genug, kann ein *Konversionselektron* aus der Schale mit Energie $E_e = E_\gamma - E_B$ ausgelöst werden.

Die Prozesse Emission von Γ–Quant und Erzeugung von Konversionselektronen sind konkurrierend. Der Konversionskoeffizient $\alpha = \frac{N_e}{N_\Gamma}$ gibt das Verhältnis von Intensität der Konversionselektronen I_{N_e} zur Intensität der Γ–Quanten I_Γ an.

1.4.2 Auger–Elektronen

Wenn durch K–Einfang oder einen Konversionsprozess ein Elektron aus einer inneren Schale entfernt wird, verbleibt die Hülle in einem angeregten Zustand. Die

Anregungsenergie kann in Form von Röntgen–Strahlung emittiert oder auf ein anderes Hüllenelektron übertragen werden. Die Energie der ausgelösten *Auger–Elektronen* ist durch die Bindungsenergiedifferenz in der Hülle gegeben.

1.5 Theorie des β–Zerfalls nach Fermi

Beim β–Zerfall interessiert man sich für die Wahrscheinlichkeit, daß ein Elektron mit dem Inpuls p von Kern emittiert wird. Dazu benutzt man die Goldene Regel von Fermi, die sich aus der zeitabhängigen Störungsrechnung 1. Ordnung ergibt.

$$N(p)dp = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle f|H|i\rangle|^2 \frac{dn}{dE_0} \tag{2}$$

Dabei ist $N(p)dp$ die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit, daß ein Elektron im Impulsintervall $[p, p+dp]$ ausgesandt wird. $\langle f|H|i\rangle$ ist das Matrixelement zwischen Anfangszustand i und Endzustand f mit H als Hamiltonoperator der schwachen Wechselwirkung. Der Faktor $\frac{dn}{dE_0}$ gibt die Dichte der möglichen Energiezustände pro Energieintervall an. Es zeigt sich experimentell, daß die Form der meisten β–Spektren nur durch den Faktor $\frac{dn}{dE_0}$ bestimmt wird. Das bedeutet, daß das Matrixelement $\langle f|H|i\rangle$ nicht oder nur schwach energieabhängig ist und deshalb als konstant angesehen wird.

Die Zustandsdichte dn ist das Produkt aus den Zustandsdichten von Elektron und Neutrino, da die Impulse der beiden statistisch unabhängig sind.

$$dn = dn_e dn_\nu \tag{3}$$

Wenn man den Kern mithilfe des Fermi–Gas–Modells beschreibt, erhält man die Zustandsdichte im Phasenraum. Man betrachtet zunächst die Nukleonen als wechselwirkungsfreie Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$, die sich im 'Kernpotentialtopf' befinden. Für ein Teilchen betrachtet man die zeitunabhängige Schrödinger–Gleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi = E\Psi$$

Der Einfachheit halber gehen wir zum eindimensionalen Fall über:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X = E_x X$$

Für diese DGL ergibt sich leicht die Lösung:

$$X_\lambda = A_\lambda \mathrm{e}^{ik_\lambda x} + B\mathrm{e}^{-ik_\lambda x} \qquad k_\lambda = \frac{\sqrt{2mE_x}}{\hbar}$$

Mit den Randbedingungen $X(x) \stackrel{!}{=} 0$ für $x = \pm\frac{a}{2}$ (Potentialkasten) folgt:

$$\begin{aligned} X_{\lambda^+} &= \tfrac{2}{\sqrt{2a}}\cos k_{\lambda^+}x \quad \text{für}\lambda^+ = 1,3,5,\ldots \\ X_{\lambda^-} &= \tfrac{2i}{\sqrt{2a}}\cos k_{\lambda^-}x \quad \text{für}\lambda^- = 0,2,4,\ldots \end{aligned}$$

Für die Energieeigenwerte ergibt sich dann

$$E_x = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \lambda_x^2 \qquad \lambda_x = 0,1,2,\ldots$$

Diese Rechnung gilt auch entsprechend für die y– und z–Koordinate. Die Lösung der dreidimensionalen Schrödinger–Gleichung bildet sich wie folgt aus den eindimensionalen Lösungen:

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{r}) &= X(x)Y(y)Z(z) \\ E &= E_x + E_y + E_z = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2(\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2) \\ p^2 &= \left(\frac{\hbar\pi}{a}\right)^2(\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2)\end{aligned}$$

Wenn man λ_x, λ_y, λ_z als Koordinatenachsen wählt, erhält man ein Punktgitter. Um die Zustandsdichte an der Kugeloberfläche mit Radius ρ zu berechnen, muß man die Zahl der Gitterpunkte, die sich in der Kugelschale zwischen den Radien ρ und $\rho + d\rho$ befinden, 'abzählen'mit

$$\rho^2 = \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2$$

Es ergibt sich mit $dn = \frac{\pi}{2}\rho^2 d\rho$ und $\rho^2 = \left(\frac{pa}{\pi\hbar}\right)^2$:

$$\boxed{dn = \frac{a^3}{2\pi^2\hbar^3}p^2 dp} \tag{4}$$

Durch Einsetzen von (3) und (4) in (2) erhält man:

$$N(p)dp = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle f|H|i\rangle|^2\left(\frac{a^3}{2\pi^2\hbar^3}\right)^2\frac{p_\nu^2 dp_\nu p_e^2 dp_e}{dE_0} \tag{5}$$

Bei β–Zerfall ist die Summe der kinetischen Energien des Elektrons E_e und des Neutrinos E_ν konstant (der Kern habe wegen der großen Masse keine Rückstoßenergie):

$$E_0 = E_e + E_\nu$$

Wenn man die Ruhemasse des Neutrinos als null ansetzt, erhält man:

$$E_{\nu_{kin}} = p_\nu c \implies p_\nu = \frac{E_\nu}{c} = \frac{E_0 - E_e}{c} \tag{6}$$

$$\implies dp_\nu = -\frac{1}{c}dE_e \tag{7}$$

Mit (6) und (7) wird aus (5) die *Impulsdarstellung*:

$$\boxed{N(p)dp \propto p_e^2(E_0 - E)dp_e}$$

1.6 Fermi–Plot in Impulsdarstellung

Die obige Formel wird oft in Einheiten von m_0 und c geschrieben mit folgenden einheitenlosen Größen:

$$\text{Impuls } \eta = \frac{p}{m_0 c} \qquad \text{Energie } \varepsilon = \frac{W}{m_0 c^2} \qquad \varepsilon^2 - \eta^2 = 1$$

Man erhält die *normierte Impulsdarstellung*:

$$\boxed{N(\eta)d\eta \propto \eta^2 \left(\sqrt{1+\eta_0} - \sqrt{1+\eta}\right)^2 d\eta} \tag{8}$$

Das Impulsspektrum hat folgende Gestalt:

Abb.3 Impulsspektrum des β–Zerfalls

Zu berücksichtigen ist noch eine Coulomb–Korrektur, da Positronen (β^+–Zerfall) bei der Emission beschleunigt werden und Elektronen (β^-–Zerfall) gebremst werden. Dies geht in das Matrixelement $\langle f|H|i\rangle$ mit ein. Der Korrekturfaktor $F(E,Z)$ wird auch Fermi–Funktion genannt. Für $Z=0$ ist $F=1$, für β^-–Emission ist $F>1$ und für β^+–Emission ist $F<1$. Insgesamt folgt die *Impulsdarstellung mit Coulomb–Korrektur*:

$$\boxed{N(p)dp \propto F(E,Z)p^2(E_0-E)} \tag{9}$$

Abb.4 Impulsspektrum des β–Zerfalls mit Coulomb–Korrektur

1.7 Fermi–Plot in Energiedarstellung

Da wir in diesem Versuch jedoch nicht die Zählraten in Abhängigkeit des Impulses messen, sondern in Abhängigkeit der Energie muß aus der Formel (8) erst die normierte *Energiedarstellung* hergeleitet werden. Man braucht dazu folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}}{m_0c^2} \\ \Longrightarrow p^2 &= m_0^2c^2(\varepsilon^2 - 1) \\ \Longrightarrow dp &= m_0c(\varepsilon^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}\varepsilon d\varepsilon \\ E &= m_0c^2(\varepsilon - 1) \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man

$$p^2(E - E_0)dp = m_0^4c^5\sqrt{\varepsilon^2 - 1}(\varepsilon_0 - \varepsilon)\varepsilon d\varepsilon$$

und schließlich für die *normierte Energieverteilung*:

$$\boxed{N(\varepsilon)d\varepsilon \propto \varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - 1}(\varepsilon_0 - \varepsilon)d\varepsilon}$$

Die normierte Impulsdarstellung mit Coulombkorrektur (9) kann dann ebenfalls in Energiedarstellung gebracht werden:

$$N(\varepsilon)d\varepsilon \propto F(E, Z)\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - 1}(\varepsilon_0 - \varepsilon)d\varepsilon$$

Trägt man die Größe

$$F(\varepsilon) = \sqrt{\frac{N(\varepsilon)}{F(E, Z)\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}} \tag{10}$$

gegen die Energie ε auf, so erhält man eine Gerade, die die x–Achse in ε_0 schneidet. Die Darstellung nennt man *Curie–Plot* oder *Fermi–Diagramm*. Ist das Spektrum aus mehreren Übergängen zusammengesetzt, so kann man diese im Plot trennen.

Abb.5 Curie–Plot in Energiedarstellung

2 Versuchsaufbau

2.1 Meßapparatur

Die Versuchsanordnung besteht aus einem Szintillator (Anthrazen–Einkristall), einem Sekundärelektronenvervielfacher (SEV), einem Vielkanalanalysator (VKA) und Verstärkern. In dem aus einer floureszierenden Substanz bestehenden Szintillator (der Abstand Leitungsband zu Valenzband ist sehr klein) enstehen beim Einfall energiereicher Strahlung Lichtblitze, deren Intensität proportional zur absorbierten Strahlungsenergie ist. Eine energetisch passend gewählte Photokathode (deshalb hat der Szintillator dieses Versuchs großes Ansprechvermögen für β–Strahlung und geringes Ansprechvermögen für Γ–Strahlung) registriert diese Photonen, indem Elektronen durch den Photoeffekt ausgelöst werden. Der SEV verstärkt die Elektronen lawinenartig und erzeugt ein Spannungsausgangssignal. Die maximale Ausgangsamplitude erhält man unter der Bedingung, daß die Zeitkonstante $t = RC$ (R ist der Arbeitswiderstand) sehr viel größer ist als die Dauer des Stromimpulses im SEV. Dieser Fall wird für eine Energiemessung angestrebt. Im Fall der Teilchenzählung wird eine kleine Zeitkonstante gewählt, um eine hohe Zählrate zu erhalten.

2.2 Radioaktive Isotope

Für den Versuch werden die beiden radioaktiven Isotope ^{137}Cs und ^{207}Pb benutzt. In der folgenden Abbildung sind die wichtigsten Zerfallsenergien dargestellt:

Abb.6 Zerfallsschemata von ^{137}Cs und ^{207}Pb

3 Auswertung

3.1 Eichung des Vielkanalanalysators

Die Eichung des VKA erfolgt mit den Präparaten ^{137}Cs und ^{207}Bi. Dabei werden die Linien der Konversionselektronen, die im Spektrum registriert werden, verwendet (Zerfallsschemata siehe 2.2). Um die Energie der Konversionselektronen zu berechnen, muß man die Bindungsenergie des ausgelösten s–Elektrons noch subtrahieren:

$$E_e = E_\Gamma - E_B$$

Die Werte für E_B wurden aus der der Versuchsanleitung beigefügten Tabelle entnommen. Die Kanalpositionen der Peaks wurden aus den ersten Eichungen der beiden Präparate entnommen:

Abb.7 ^{207}Bi Eichungen

Abb.8 ^{137}Cs Eichungen

Tabelle 1 Energie der Konversionselektronen

Übergang	$E_\Gamma[keV]$	$E_B[keV]$	$E_e[keV]$	Kanal
$^{137}Cs \longrightarrow {}^{137}Ba$	662	37.4	625	180 ± 5
$^{207}Bi \longrightarrow {}^{207}Pb$	1064	88	976	290 ± 5
$^{207}Bi \longrightarrow {}^{207}Pb$	569	88	481	135 ± 5

Aus den obigen Werten berechnet sich die Eichgerade über kleinste Fehlerquadrate:

$$\boxed{\text{Energie[KeV]} = (3.194 \pm 0.001) \cdot \text{Kanal} + 49.8 \pm 0.2} \qquad (11)$$

Graphisch ist die Eichgerade in der folgenden Abbildung dargestellt:

Abb.9 Gerade der Energieeichung

Aus den Abbildungen Abb.7 und Abb.8 entnimmt man, daß bei den nach einiger Zeit wiederholten Eichungen es kaum zu einer nennenswerten Verschiebung der Energien gekommen ist. Was jedoch auffällt ist die trotz gleichgehaltener Zeitspanne ($T = 300[s]$) zurückgegangene Zählerrate, was wir uns auf Anhieb nicht erklären können. Es könnte vielleicht durch einen Sättigungseffekt des Szintillators verursacht worden sein.

Abb.10 ^{137}Cs–Spektrum aus größerer Entfernung

Aus der obigen Abbildung erkennt man, daß die Entfernung des Szintillators zur Quelle sehr entscheidend für die Eichung als auch für die Qualität der Messung ist. Die Elektronen erfahren beim Durchqueren der Luft eine Energieverlust, der die beiden Peaks zu kleineren Energien verschiebt. Gleichzeitig nimmt die Halbwertsbreite der Peaks zu und damit die Genauigkeit der Messung ab.

3.2 Auswertung des β–Spektrums von ^{137}Cs

Bei diesem Versuch wurde das Spektrum von ^{137}Cs über eine Zeitraum von $60[min]$ gemessen. In der folgenden Tabelle sind die wichtigsten Daten des Spektrums zusammengefaßt:

Tabelle 2 Langzeitmessung ^{137}Cs

Kanal	Zählrate	$E[keV]$	$F(E,Z)$	ε	$F(E,Z)\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2-1}$	$F(\varepsilon)$
5	25951	65.8	13.35	1.129	7.890	57.352
10	116095	81.7	12.16	1.160	8.288	118.352
15	140278	97.7	11.29	1.191	8.705	126.946
20	166881	113.7	10.62	1.223	9.130	135.198
25	191023	129.6	10.08	1.254	9.553	141.405
30	204879	145.6	9.65	1.285	10.005	143.101
35	208646	161.6	9.28	1.316	10.454	141.274
40	205083	177.5	8.97	1.347	10.913	137.084
45	201911	193.5	8.70	1.379	11.384	133.181
50	193444	209.5	8.47	1.410	11.871	127.654
55	182366	225.5	8.25	1.441	12.342	121.558
60	168836	241.4	8.07	1.472	12.842	114.663
65	158910	257.4	7.91	1.504	13.358	109.071
70	147804	273.4	7.76	1.535	13.873	103.220
75	133144	289.3	7.63	1.566	14.403	96.146
80	120431	305.3	7.50	1.597	14.925	89.828
85	109841	321.3	7.38	1.629	15.454	84.307
90	97470	337.2	7.28	1.660	16.009	78.028
95	86649	353.2	7.18	1.691	16.561	72.333
100	74165	369.2	7.09	1.723	17.128	65.803
105	64492	385.1	7.01	1.754	17.709	60.348
110	54186	401.1	6.94	1.785	18.315	54.393
115	44945	417.1	6.86	1.816	18.890	48.777
120	36129	433.0	6.79	1.847	19.484	43.062
125	28940	449.0	6.72	1.879	20.078	37.965
130	22547	465.0	6.67	1.910	20.731	32.979
135	18234	481.0	6.61	1.941	21.351	29.223
140	14765	496.9	6.55	1.972	21.964	25.927
145	13837	512.9	6.50	2.004	22.614	24.736
150	14892	528.9	6.45	2.035	23.264	25.301
155	18464	544.8	6.40	2.066	23.908	27.790
160	23509	560.8	6.35	2.097	24.556	30.941
165	30397	576.8	6.31	2.129	25.243	34.701
170	36272	592.7	6.27	2.160	25.926	37.404
175	39874	608.7	6.23	2.191	26.616	38.706
180	39704	624.7	6.19	2.223	27.306	38.132
185	37350	640.6	6.15	2.254	27.991	36.529
190	31560	656.6	6.12	2.285	28.729	33.144
195	23955	672.6	6.08	2.316	29.422	28.534
200	16761	688.5	6.05	2.347	30.160	23.574
205	10953	704.5	6.02	2.379	30.905	18.826
210	6543	720.5	5.99	2.410	31.654	14.377
215	3744	736.5	5.96	2.441	32.404	10.749
220	2063	752.4	5.93	2.472	33.152	7.889
225	1354	768.4	5.90	2.504	33.907	6.319
230	859	784.4	5.87	2.535	34.664	4.978
235	669	800.3	5.85	2.566	35.477	4.342
240	520	816.3	5.82	2.597	36.240	3.788
245	410	832.3	5.80	2.629	37.067	3.326
250	379	848.2	5.77	2.660	37.828	3.165
255	318	864.2	5.75	2.691	38.663	2.868
260	300	880.2	5.73	2.723	39.502	2.756
265	234	896.1	5.71	2.754	40.340	2.408
270	211	912.1	5.68	2.785	41.115	2.265

Die Energie wurde über die Eichgerade (11) bestimmt und der Wert von $F(E,Z)$ aus den beigfügten Tabellen durch lineare Interpolation berechnet. ε ergibt sich aus dem Zusammenhang $\varepsilon := \frac{E+m_0c^2}{m_0c^2}$ mit der Ruheenergie des Elektrons $m_0c^2 = 511[keV]$. Die Werte $F(\varepsilon)$ des Curie–Plots sind über Gleichung (10) ermittelt worden.

Abb.11 ^{137}Cs–Spektrum mit guter Statistik

Wegen der langen Zeitspanne liegen in allen wichtigen Kanälen Zählraten über 10000 vor, so daß dort der statistische Fehler kleiner als 1 Prozent ist. Für die nachfolgenden Berechungen und Auftragungen wurde jeweils jeder fünfte Kanal (angefangen mit Kanal 5, was sich im nachhinein (siehe Diagramme) als ungünstig erwiesen hat, Kanal 10 wäre besser gewesen) berücksichtigt. Die folgende Abbildung zeigt den Curie–Plot in Energiedarstellung:

Abb.12 Curie–Plot in Energiedarstellung

Man erkennt, daß es sich um zwei β–Übergänge handeln muß. Der zu erwartende Knick in der Steigung am Schnittpunkt der beiden Geraden ist jedoch nicht zu erkennen, da gerade dort das Spektrum von einem Konversionspeak überlagert wird. Zur Bestimmung der β–Grenzenergien ε_0 haben wir deshalb nur die linearen Teile des Diagramms berücksichtigt, die in beiden folgenden Diagrammen vergrößert dargestellt sind:

Abb.13 Geradenanpassung Peak 1

Abb.14 Geradenanpassungen Peak 2

Bei der ersten Anpassung ist der lineare Verlauf gut zu erkennen und auch die Geradenanpassung liefert gute Resultate. Bei der zweiten Gerade entstehen Probleme durch die Überlagerung des Konversionspeaks. Je nachdem welchen Punkt man als ersten in die Anpassung einfließen läßt, verändert sich die Steigung und damit der

Schnittpunkt mit der x–Achse noch geringfügig. Zur Verdeutlichung dieses Effektes sind für den zweiten Peak einmal die letzten 9 Punkte und einmal nur die letzten 6 Punkte benutzt worden. Die Geradenanpassung ist von der Gestalt:

$$F(\varepsilon) = a \cdot \varepsilon + b$$

Daraus ergibt sich der Schnittpunkt mit der x–Achse zu:

$$\varepsilon_0 = -\frac{b}{a}$$

In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse der drei Geradenanpassungen zusammengefaßt:

Tabelle 3 Geradenanpassung Curie–Plot

Peak	Kanal	a	b	ϵ_0	$E_0[keV]$	$E_{soll}[keV]$
1	$50 - 130$	-192 ± 2	397 ± 3	2.07 ± 0.03	547 ± 8	511
2	$230 - 270$	-10.329 ± 0.9	30.79 ± 2	3.0 ± 0.3	1020 ± 102	1172
2	$245 - 270$	-7.5682 ± 0.6	23.286 ± 2	3.1 ± 0.3	1073 ± 104	1172

Für die Ermittlung der Fehler wurde das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz benutzt:

$$\begin{aligned} \Delta F &= \left|\frac{\partial}{\partial N} F\right| \Delta N + \left|\frac{\partial}{\partial \varepsilon} F\right| \Delta\varepsilon \\ &= \frac{\Delta N}{2F(\varepsilon)} + \sqrt{\frac{N}{4F(E,Z)}} (\varepsilon^4 - \varepsilon^2)^{-\frac{5}{4}} (4\varepsilon^2 - 2\varepsilon) \Delta\varepsilon \end{aligned}$$

Tabelle 4 Fehler des Curie–Plots

Kanal	N	ΔN	$E[keV]$	$\Delta E[keV]$	ε	$\Delta\varepsilon$	$\Delta F(\varepsilon)$
50	193444	440	209.5	0.27	1.410	0.0013	8.7
130	22547	150	465.0	0.35	1.910	0.0014	6.7
230	859	29	784.4	0.54	2.535	0.0015	5.9

Die Fehler wurden auf der Abb.12 abgetragen.

Korrektur und Trennung der Peaks

Man kann die beiden überlagerten β–Spektren nicht genau trennen. Das Problem besteht darin: man hat zwar die Geraden $F_1(\varepsilon)$ und $F_2(\varepsilon)$ interpoliert, es ist jedoch nicht möglich durch Inversion der Gleichung (10) auf die Zählraten der Einzelpeaks zu schließen. Es gilt:

$$F_{ges}(\varepsilon) = \sqrt{\frac{N_{ges}(\varepsilon)}{F(E,Z)\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}} =: \sqrt{\frac{N_{ges}}{x}}$$

woraus folgt:

$$N_{ges} = F^2(\varepsilon)x = (F_1(\varepsilon) + F_2(\varepsilon))^2 x \tag{12}$$

Wenn man nun die Werte N_1 und N_2 aus F_1 und F_2 bestimmt

$$F_1(\varepsilon) = \sqrt{\frac{N_1}{x}} \Longrightarrow N_1 = F_1^2 x \tag{13}$$

$$F_2(\varepsilon) = \sqrt{\frac{N_2}{x}} \Longrightarrow N_2 = F_2^2 x \tag{14}$$

dann folgt mit (12), (13) und (14):

$$N_{ges} = (F_1(\varepsilon) + F_2(\varepsilon))^2 x \neq F_1^2(\varepsilon) + F_2^2(\varepsilon) = N_1 + N_2$$

Wir haben deshalb angenommen, daß die Zählraten von N_2 besser mit den tatsächlichen übereinstimmen, da sie kleiner sind. Aus der Differenz zwischen Zählrate N und der aus F_2 ermittelten Zählrate N_2 wurde die korrigierte Zählrate $N_1 = N - N_2$ bestimmt.

Tabelle 5 Korrigiertes Spektrum

$F_1(\varepsilon)$	$F_2(\varepsilon)$	$N_{1_{neu}}$	$N_{2_{neu}}$	$N(F_1,F_2)$	$N-N(F_1,F_2)$	$N-N_{2_{neu}}$
180,277	14,743	256408	1715	300062	0	24236
174,303	14,508	251809	1744	295471	0	114351
168,291	14,271	246533	1773	290117	0	138505
162,279	14,034	240431	1798	283814	0	165083
156,305	13,798	233402	1819	276429	0	189204
150,293	13,561	225992	1840	268615	0	203039
144,281	13,324	217624	1856	259675	0	206790
138,307	13,089	208758	1870	250140	0	203213
132,295	12,852	199235	1880	239825	0	200031
126,284	12,615	189313	1889	229024	0	191555
120,272	12,378	178529	1891	217167	0	180475
114,298	12,143	167763	1893	205301	0	166943
108,286	11,906	156630	1893	192965	0	157017
102,274	11,669	145108	1889	180108	0	145915
96,300	11,433	133572	1883	167171	0	131261
90,288	11,196	121669	1871	153715	0	118560
84,277	10,959	109762	1856	140164	0	107985
78,303	10,724	98158	1841	126885	0	95629
72,291	10,487	86548	1821	113479	0	84828
66,279	10,250	75243	1799	100314	0	72366
60,305	10,014	64400	1776	87565	0	62716
54,293	9,777	53988	1751	75183	0	52435
48,281	9,540	44035	1719	63157	0	43226
42,307	9,305	34874	1687	51901	0	34442
36,295	9,068	26450	1651	41318	0	27289
30,284	8,831	19012	1617	31717	0	20930
24,272	8,594	12579	1577	23063	0	16657
18,298	8,358	7354	1534	15607	0	13231
12,286	8,121	3414	1492	9418	4419	12345
6,274	7,884	916	1446	4664	10228	13446
0,300	7,649	2	1399	1511	16953	17065
0,000	7,412	0	1349	1349	22160	22160
0,000	7,175	0	1300	1300	29097	29097
0,000	6,940	0	1249	1249	35023	35023
0,000	6,703	0	1196	1196	38678	38678
0,000	6,466	0	1142	1142	38562	38562
0,000	6,230	0	1086	1086	36264	36264
0,000	5,993	0	1032	1032	30528	30528
0,000	5,756	0	975	975	22980	22980
0,000	5,521	0	919	919	15842	15842
0,000	5,284	0	863	863	10090	10090
0,000	5,047	0	806	806	5737	5737
0,000	4,810	0	750	750	2994	2994
0,000	4,574	0	694	694	1369	1369
0,000	4,337	0	638	638	716	716
0,000	4,100	0	583	583	276	276
0,000	3,865	0	530	530	139	139
0,000	3,628	0	477	477	43	43
0,000	3,391	0	426	426	0	0
0,000	3,155	0	377	377	2	2
0,000	2,919	0	329	329	0	0
0,000	2,682	0	284	284	16	16
0,000	2,446	0	241	241	0	0
0,000	2,209	0	201	201	10	10

In der Tabelle ist ganz klar zu erkennen, daß $N_1 + N_2 \neq N$ ist. Es folgen die korrigierten Peaks:

Abb.15 Peak 1 korrigiert

Abb.16 Peak 2 korrigiert

3.3 Bestimmung des Konversionskoeffizienten

Um die Zählrate der Konversionselektronen zu bestimmen wurde von der Gesamtzählrate N die Zählrate $N(F_1, F_2)$ subtrahiert (siehe Tab.5). Man erhält folgenden Verlauf:

Abb.17 Konversionspeak

Der Konversionskoeffizient ist definiert durch:

$$\alpha := \frac{N_e}{N_\Gamma} = \frac{N_e}{N_\beta - N_e}$$

Durch Summation der Zählraten und mit $N_\beta = 3177257 \pm 1782$ erhält man:

$$\begin{aligned} N_e &= 322129 \pm 568 \\ N_\Gamma &= 2855128 \pm 2300 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$\boxed{\alpha = 0.1128 \pm 0.0002}$$

Der ermittelte Wert liegt also sehr nahe am theoretischen Wert von $\alpha = 0.11$.

3.4 Auflösungsvermögen der Apparatur

Das Auflösungsvermögen der Apparatur wird anhand der Konversionslinie bestimmt:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon - 1} = \frac{0.254}{2.21 - 1} = 20.99$$

Die Apparatur hat also eine Auflösung von ca. 21 %.

3.5 Gesamtansprechvermögen für Γ–Strahlung

Um das Gesamtansprechvermögen zu ermitteln, wurde die ^{137}Cs–Strahlung durch einen Absorber geschickt, der die β–Strahlung fast komplett absorbiert, die Γ–Strahlung jedoch durchläßt. In der folgenden Abbildung ist dieses Spektrum zu sehen:

Abb.18 ^{137}Cs Γ–Spektrum

Durch Summation der Kanäle ergibt sich als Zählrate $N_{\Gamma_1} = 98174 \pm 313$. Allerdings wurde hier jeder Kanal von 5 bis 200 gezählt so, daß die Zahl durch 5 geteilt werden muß. Außerdem ist das Γ–Spektrum nur über einen Zeitraum von $T = 10[min]$ aufgenommen worden, wohingegen die Langzeitmessung $T = 60[min]$ betrug, was durch den Faktor 6 berücksichtigt wird. Man erhält als Zählraten:

$$\begin{aligned} N_{\Gamma_1} &= 98174 \pm 313 \\ N_{\Gamma_2} = N_\beta - N_e &= 2855128 \pm 2300 \end{aligned}$$

Es werden also nur 3.44 ± 0.01 % aller emittierten Γ–Quanten vom Detektor registriert.

3.6 Berechnung der Compton–Kante

Aus dem Zerfallsschema für ^{137}Cs erkennt man, daß die Zerfallsenergie für den Γ–Zerfall $E_\Gamma = 662[keV]$ beträgt. Die maximale Energie bei Compton–Streuung geht bei zentralem Stoß auf das Elektron über. Das rückgestreute Photon hat dann die Energie:

$$E_{\Gamma'} = \frac{E_\Gamma}{1 + \frac{2E_\Gamma}{m_0 c^2}} = 184[keV]$$

Damit beträgt die Energie des Elektrons:

$$E_e = E_\Gamma - E_{\Gamma'}$$

Experimentell wurde die Compton–Kante aus dem Spektrum in Abb.18 abgelesen. Man erhält als Kanal 145 ± 5 und damit über die Enegieeichung (11) die Energie:

$$\boxed{E_e = (513 \pm 16)[keV]}$$

Die Abweichung vom theoretischen Wert ist dadurch zu erklären, daß die Energieeichung mit β–Linien durchgeführt wurde. Jedoch verlieren die Elektronen beim Durchqueren von Aluminium einen Teil ihrer Energie, so daß die Energieskala verschoben ist. Bei der Messung eines Γ–Übergangs, dessen Γ–Quanten kaum in Aluminium abgebremst werden, wird jedem Kanal eine zu hohe Energie zugeordnet.

3.7 Rückstoßenergie des Bariumskerns

Der Rückstoß des Bariumskerns ist genau dann maximal, wenn die Energie des β–Teilchens maximal ist, denn in diesem Fall bleibt für das Neutrino keine Energie mehr übrig. Der relativistische Impuls des β–Teilchens berechnet sich zu:

$$\begin{aligned}
W &= \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \\
\Longrightarrow p &= \frac{1}{c}\sqrt{W^2 - m_0^2c^4} \\
&= \frac{1}{c}\sqrt{(E_K + m_0c^2)^2 - m_0^2c^4} \\
&= \frac{1}{c}\sqrt{E_K^2 + 2m_0c^2E_K} \\
&= \frac{1}{c}884[kEV]
\end{aligned}$$

Für den Kern gilt:

$$E_{kin} = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} - m_0c^2$$

Mit $m_0c^2 = 1.2776 \cdot 10^5[keV]$ für Barium folgt:

$$E_{kin} \simeq 3.06[eV]$$

Die Rückstoßenergie ist demnach vernachlässigbar gegenüber der Zerfallsnergie.