Fortgeschrittenen– Praktikum
2. Physikalisches Institut
Versuch Nr.2
Analogrechner

Marcus Rickert Eike Ulbrich

21. November 1990

Inhaltsverzeichnis

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Einleitung

In diesem Versuch soll die Funktionsweise von Analogrechnern an einigen einfachen Beispielen untersucht werden. Man bedient sich dazu sogenannter *Operationsverstärker*, die als hochintegrierte Schaltkreise vorliegen. Mit ihrer Hilfe lassen sich Operation wie Addition, Differenziation und Integration simulieren, indem die physikalische Meßgröße Spannung als mathematische Variable aufgefaßt wird. Kombiniert man die einzelnen Elemente entsprechend, so erhält man Schwingungs–Schaltkreise, bei denen die Ausgangs–Spannung die Lösung einer lineraren bzw. nicht lineraren Differentialgleichung darstellt. Beide DGL's lassen sich sowohl dämpfungsfrei als auch mit Dämpfung, sowie mit oder ohne äußere Anregung realisieren. Die anhand der Spannungs–Messung erhaltenen Werte werden im Versuch mit der den theoretischen Werten verglichen, die man in den meisten Fällen aus einfachen Zusammenhängen der geschalteten Widerstände und Kapazitäten ableiten kann.

1.2 Der Operationsverstärker

Ein Operationsverstärker ist ein elektronisches Schaltelement, das die Differenz zweier gegebener Eingangsspannungen (Vorzeichen erhaltend) verstärkt. Er sollte im Idealfall folgende Eigenschaften haben:

1. die Verstärkung ist linear und möglichst groß,
2. es existieren keine internen Induktivitäten oder Kapazitäten,
3. der Eingangswiderstand ist undendlich und
4. der Ausgangswiderstand ist null.

In der Realität werden natürlich die obigen Forderungen nicht erfüllt, es stellt sich jedoch bei den Rechnungen und im Experiment heraus, daß die Forderungen 1, 3 und 4 so gut erfüllt sind, daß die Ergebnisse nicht merklich beeinflußt werden. Die Forderung 2 kommt ist im Experiment deswegen belanglos, da nur mit Frequenzen mit $\nu \leq 1000[Hz]$ gearbeitet wird und man somit voll in der Bandbreite des verwendeten Typs liegt.

1.2.1 Die innere Verstärkung v_i

Ein Operationsverstärker hat zwei Eingänge: einen invertierenden (negativen) Eingang **E-**, an dem die Eingangsspannung U_{E-} anliegt und einen nicht invertierenden (positiven) Eingang **E+**, an dem die Eingangsspannung U_{E+} anliegt. Am Ausgang greift man die Ausgangsspannung U_A ab. Mit Hilfe obiger Größen kann man man die *interne Verstärkung* v_i wie folgt definieren:

$$U_A = v_i(U_{E+} - U_{E-}) \tag{1}$$

Dieser Wert liegt bei denen im Experiment verwendeten OPs bei ca. 10^5, was eine beachtliche Verstärkungsleistung darstellt. Man muß jedoch bedenken, daß die Bausteine über eine Versorgungsspannung von $U_V = \pm 15[V]$ versorgt werden, so daß die Ausgangsspannungs (wegen der internen Schaltungsverluste) nur Werte von $U_S = \pm 13[V]$ erreicht. Diese maximale Ausgangsspannungs nennt man *Sättigungsspannung.*

1.2.2 Die äußere Verstärkung v_a

In vielen Schaltungen wird nur *ein* Eingang mit Eingangsspannung U_E des Operationsverstärkers zur Steuerung benutzt und der andere entweder an Masse oder auf ein durch Rückkopplung mit der Ausgangsspannung erhaltenes Potential gelegt. In diesem Fall definiert man die *äußere Verstärkung* v_a als:

$$U_A = v_a U_E \tag{2}$$

In diesem Experiment wird uns hauptsächlich die äußere Verstärkung interressieren, da die Standard-Analog-Bauelemente wie Negierer und Integrator nur einen Eingang besitzen.

1.3 Rückgekoppelte OPs

1.3.1 Negatives Feedback

Beim *Negativen Feedback* wird der positive Eingang des OPs auf Masse gelegt und der negative Eingang über R_1 und R_2 vom Ausgang rückgekoppelt.

Abb.1 Negatives Feedback eines OPs

Man erhählt in diesem Fall für die Ausgangsspannung:

$$U_A = -v_i U_{E-} \tag{3}$$

d.h. die Ausgangsspannung wirkt der Änderung der Eingangsspannung entgegen und damit stabilisierend. Der Endzustand wird dann erreicht wenn U_{E-} fast null ist. Da der Eingangswiderstand des OPs als null angenommen wurde gilt in obiger Schaltung:

$$I_E = I_A \tag{4}$$

$$I_E = \frac{U_E}{R_1} \tag{5}$$

$$I_A = \frac{-U_A}{R_2} \tag{6}$$

Daraus folgt für die äußere Verstärkung:

$$v_a = \frac{U_A}{U_E} = -\frac{R_2}{R_1} \tag{7}$$

In Spezialfall $R_1 = R_2$ wird die Eingangsspannung also gerade negiert. Man beachte, daß im angenommenen Fall des idealen OPs, die äußere Verstärkung unabhängig von der inneren Verstärkung ist und nur von externen Widerständen abhängt.

Geht man jedoch von der Annahme aus, daß U_{E-} nicht exakt null ist, so erhält man folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} I_A &= I_E \\ I_A &= \frac{U_E - U_{E-}}{R_1} \qquad \text{und} \qquad I_E = \frac{U_{E-} - U_A}{R_2} \\ \Longrightarrow U_{E-} &= \frac{1}{1 + (1 + v_i)\frac{R_1}{R_2}} U_E \end{aligned}$$

Da in diesem Versuch $v_i \approx 10^5 \gg 1$ ist, vereinfacht sich die Formel zu

$$U_{E-} \cong \frac{1}{1 + \frac{R_1 v_i}{R_2}} U_E$$

Diese Spannung wird auch *reduzierte Eingangsspannung* genannt. Den Quotienten aus reduzierter Eingangsspannung und Eingangsspannung bezeichnet man als *Reduzierung der Eingangsspannung g*:

$$g = \frac{U_{E-}}{U_E}$$

Im Beispiel des Negierers erhält man für g und v_a:

$$g = \frac{1}{1 + \frac{R_1 v_i}{R_2}} \tag{8}$$

$$v_a = -\frac{1}{\frac{1}{v_i} + \frac{R_1}{R_2}} \tag{9}$$

Betrachtet man hier den Grenzübergang $v_i \to \infty$ dann ergibt sich für v_a genau das Ergebnis (7) und für g der Wert null.

Betrachtet man die Ausgangswerte

$$\begin{aligned} \frac{R_2}{R_1} &= 100 \\ v_i &= 10^5 \end{aligned}$$

so ergibt sich für die Übereinstimmung von exaktem und genähertem Wert:

$$\frac{v_{a\,genähert}}{v_{a\,exakt}} = \frac{R_2}{v_i R_1} + 1 = 1.01$$

d.h. der Wert weicht nur 1 Prozent vom exakten OP ab.

1.3.2 Der Addierer

Beim Addierer ergibt sich der Eingangsstrom des OPs durch Summation einzelner Ströme $I_1, \ldots, I_n$, die den zu summierenden Spannungen $U_1, \ldots, U_n$ proportional sind.

Abb.2 Addierer

Für den Gesamteingangsstrom ergibt sich

$$I_E = \frac{U_1}{R_1} + \cdots + \frac{U_n}{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{U_i}{R_i}$$

Entsprechend (4) bis (6) erhält man für die Ausgangsspannung:

$$U_A = -R \sum_i \frac{U_i}{R_i} \tag{10}$$

Die Eingangsspannungen werden also mit dem Kehrwert der jeweiligen Eingangswiderstände gewichtet. Betrachtet man den Spezialfall $R_E = R_1 = \ldots = R_n$ so erhält man den ungewichteten Addierer:

$$U_A = -\frac{R}{R_E} \sum_i U_i$$

1.3.3 Der Integrator

Beim Integrator wird der Widerstand R des Addierers (siehe 1.3.2) durch einen Kondensator der Kapazität C ersetzt.

Abb.3 Integrator

Da auch hier $U_{E-} \cong 0$ angenommen wird, entspricht die Ausgangsspannung der Spannung, die am Kondensator abfällt

$$U_A = \frac{Q}{C} = -\frac{1}{C}\int I_A \mathrm{dt} = -\frac{1}{C}\int I_E \mathrm{dt}$$

Mit (5) erhält man

$$U_A = -\frac{1}{RC}\int U_E \mathrm{dt} \tag{11}$$

Die vorliegende Schaltung integriert also eine angelegte Eingangsspannung mit der Zeit als Integrationsparameter. Bei konstanter Eingangsspannung U_E ergibt sich

$$\Delta U_A = -\frac{U_E}{RC}\Delta t \tag{12}$$

Genauso wie beim gewichteten Addierer (10) kann man auch hier den Eingangsstrom aus verschiedenen gewichteten Eingangsspannungen erhalten:

$$U_A = -\frac{1}{C}\int \sum_i \frac{U_i}{R_i} \mathrm{dt}$$

Nach vorherigen Überlegegungen ist bei exakter Rechnung der Eingang $E-$ nicht null, auch wenn gilt $U_E = 0$. Dies hat zur Folge, daß der Integrator eine kleine konstante Eingangsfehlspannung aufintegriert. Nach einer gewissen Zeit ist die Sättigungsspannung U_S erreicht und der Integrator voll ausgesteuert, d.h. er kann keine weiteren Spannungen aufintegrieren. Um diesen Effekt zu unterdrücken, wird dem Kondensator ein Widerstand R_p parallel geschaltet, der den Kondensator 'entlädt'. Dabei muß darauf geachtet werden, daß der Widerstand R_p beträchtlich größer ist, als der Wechselstromwiderstand des Kondensators im gewünschten Frequenzbereich, d.h.

$$R_p \gg \frac{1}{\omega C} \qquad \text{bzw.} \qquad \omega \gg \frac{1}{R_p C} \qquad \text{bzw.} \qquad \nu \gg \frac{1}{2\pi R_p C}$$

Im Experiment wird ein Widerstand von $R_p = 2[M\Omega]$ und ein Kondensator von $C = 10[nF]$ benutzt. In diesem Fall sollte die Frequenz größer als $50[Hz]$ sein. Jedoch bleibt auch bei genügend großer Frequenz immer ein Spannungsverlust durch Entladung. Möchte man wissen, welche Frequenz die angelegte Eingangsspannung mindestens haben muß, damit die Ausgangsspannung über eine halbe Periode $\frac{T}{2}$ höchstens auf den k-ten Teil ihres Anfangswertes abfällt, so betrachtet man einen Ersatzschaltkreis, in dem ein Kondensator über einen Widerstand entladen wird.

Abb.4 Entladung über Parallel-Widerstand

Die Zeitabhängigkeit der Spannung am Kondensator ist gegeben durch:

$$U(t) = U_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{R_p C}} \qquad \text{mit} \qquad U_0 := U(0)$$

Es soll gelten

$$\begin{aligned}
\frac{U(t+\frac{T}{2})}{U(t)} &> k \\
\Longrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{T}{2R_p C}} &> k \\
\Longrightarrow T &> -2R_p C \ln k \\
\Longrightarrow \nu &> -\frac{1}{2R_p C \ln k}
\end{aligned} \tag{13}$$

Betrachtet man nun einen maximalen Verlust von 1% bzw. 5% so erhält man mit $k = 0.99$ bzw. $k = 0.95$ die minimalen Frequenzen $\nu > 2490$ bzw. $\nu > 487$.

1.3.4 Positives Feedback

Beim OP im *Positiven Feedback* liegt die Eingangsspannung an $E-$ an und die Ausgangsspannung wird über einen Spannungsteiler $R_{1,2}$ mit $E+$ rückgekoppelt.

Abb.5 OP im Positive Feedback

Für $E+$ ergibt sich dann

$$U_{E+} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_A \tag{14}$$

Zusammen mit (1) erhält man

$$\begin{aligned} U_{E+} &= \frac{R_1}{R_1+R_2} v_i (U_{E+} - U_{E-}) \\ \Longrightarrow U_{E+} &= \frac{R_1}{R_1\left(1-\frac{1}{v_i}\right) - \frac{R_2}{v_i}} U_E \end{aligned} \tag{15}$$

Da v_i sehr groß ist gilt für Nichtsättigung $U_E \cong U_{E+}$. Steigt nun die Spannung am Eingang an, so wird nach (15) für $v_i > \frac{R_2}{R_1} + 1$ auch U_{E+} größer und dann nach (1) die Ausgangsspannung. Da aber U_{E+} über (14) mit der Ausgangsspannung rückgekoppelt ist, wird U_{E+} weiter erhöht, so daß ein instabiler Zustand vorliegt und die Ausgangsspannung so weit steigt, bis die Sättigungsspannung anliegt. Im Fall der Sättigung gilt $U_{E+} = \pm\frac{R_1}{R_1+R_2} U_S$. Betrachtet man nun die Ausgangsspannung so ergibt sich

$$U_A = v_i \left(\pm \frac{R_1}{R_1+R_2} U_S - U_E \right)$$

Geht man von einer positiven Sättigungsspannung aus, so erhält man positive Ausgangsspannungen, solange $U_E < \frac{R_1}{R_1+R_2} U_S$ gilt. Erst wenn $U_E > \frac{R_1}{R_1+R_2} U_S$ ist, wird die Ausgangsspannung negativ und das System kippt zur negativen Sättigungsspannung. Bei der umgekehrten Richtung muß $U_E < -\frac{R_1}{R_1+R_2} U_S$ sein, damit zur positiven Sättigungsspannung übergangen wird. Man erhält also eine Hysterese der Ausgangsspannung bzgl. der Eingangsspannung.

Abb.6 Hysterese beim Positive Feedback

Betrachtet man die äußere Verstärkung bei endlicher innerer Verstärkung v_i

$$v_a = -v_i \frac{R_1 + R_2}{R_1(1-v_i) + R_2}$$

so kann man drei Fälle unterscheiden:

$v_i < 1 + \frac{R_2}{R_1}$ *Unterkritischer Fall:* Hier ist v_a negativ und es kommt zu keiner instabilen Rückkopplung, sondern die Ausgangsspannung wird sich entsprechend der Gleichung $U_A = v_i \left(\pm\frac{R_1}{R_1+R_2} U_A - U_E \right)$ auf einen Wert einpendeln (siehe Abb.8).

$v_i = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ *Kritischer Fall:* Hier ist $v_a = -\infty$, d.h. bei noch so kleiner positiver Eingangsspannung, geht die Ausgangsspannung auf $-U_S$ und umgekehrt. Dieser Fall wird auch *kritische Kombination* genannt.

$v_i > 1 + \frac{R_2}{R_1}$ *Überkritischer Fall:* Hier ist v_a positiv und es liegt der oben besprochene Fall (siehe Abb.6) der Hystere vor (diese Kombination wird auch *Schmitt-Trigger* genannt)

Abb.7 Kritischer Fall

Abb.8 Überkritischer Fall

1.3.5 Reckteckgenerator (symmetrisch)

Beim Rechteckgenerator ist sowohl der positive Eingang als auch der negative Eingang über den Ausgang rückgekoppelt.

Abb.9 Rechteckgenerator

Um die Funktionsweise eines Rechteckgenerators zu verstehen, geht man von den Anfangsbedingungen

$$U_A = U_S \qquad U_{E+} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_S \qquad U_{E+} = -U_{E-}$$

aus und betrachtet dann folgende Schritte:

1. Der Kondensator wird über R_3 mit dem Strom $I = \frac{U_A}{R_3}$ zuerst entladen (denn die Spannung auf dem Kondensator ist negativ) und wieder mit umgekehrter Polung aufgeladen.

2. Sobald die Spannung am Kondensator (und damit an $E-$) größer ist als an $E+$, liegt am Ausgang eine negative Spannung an und die positive Rückkopplung über R_1 und R_2 führt dazu, daß die Ausgangsspannung solange fällt, bis $U_A = -U_S$ gilt. Damit liegt am positiven Eingang nun die Spannung $U_{E+} = \frac{R_1}{R_1+R_2}$ an.

3. Der Kondensator wird nun über die negative Ausgangsspannung entladen und mit umgekehrter Polung wieder bis $U_{E-} > U_{E+}$ aufgeladen.

4. Jetzt kippt die Ausgangsspannung zu positiven Werten bis $U_A = U_S$.

5. Es liegen wieder die Anfangsbedingungen vor und der Zyklus wiederholt sich.

Die Ausgangsspannung des Rechteckgenerators wechselt also mit steilen Flanken zwischen $\pm U_S$ hin und her. Um die Frequenz zu berechnen, betrachtet man die Zeit, die nötig ist um den Kondensator von $-\frac{R_1}{R_1+R_2} U_S$ auf $U_0 := \frac{R_1}{R_1+R_2} U_S$ aufzuladen. Dies entspricht der halben Periodendauer. Es gilt:

$$\begin{aligned} U_C &= U_S - U_{R_3} && (16) \\ \Longrightarrow \int \frac{1}{C} I \mathrm{d}t &= U_S - R_3 I && (17) \\ \Longrightarrow \frac{1}{R_3 C} I &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I \\ \Longrightarrow I(t) &= I_0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{R_3 C} t} \qquad \text{mit} \qquad I_0 = \frac{-U_{R_3 0}}{R_3} = \frac{U_S + U_0}{R_3} && (18) \end{aligned}$$

Setzt man dieses Ergebnis wieder in (17) ein, so erhält man:

$$U_C(t) = U_S - (U_0 + U_S)\mathrm{e}^{-\frac{1}{R_3 C}t} \tag{19}$$

Gesucht ist die Zeit T für die gilt: $U(\frac{T}{2}) = U_0$. Nimmt man an, daß $\frac{1}{R_3 C} \ll 1$ gilt, so vereinfacht sich (19) erheblich und man erhält durch Umformung für T:

$$T = \frac{4CR_1R_3}{R_1 + R_2}$$

Und entsprechend für die Frequenz

$$\nu_{Rechteck} = \frac{R_1 + R_2}{4CR_1R_3} \tag{20}$$

1.3.6 Rechteckgenerator (asymmetrisch)

Beim asymetrischen Rechteckgenerator ist der Widerstand, über den der Kondensator von $-U_0$ nach U_0 aufgeladen wird ungleich dem, mit dem er in der umgekehrten Richtung von U_0 nach $-U_0$ aufgeladen wird. Man erreicht dies durch Parallelschalten einer Diode.

Abb.10 Asymetrischer Rechteckgenerator

Für die beiden Ladezeiten erhält man unterschiedliche Werte:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{4R_1C(R_3 + R_4)}{R_2} \\ T_2 &= \frac{4R_1CR_3}{R_2} \end{aligned}$$

Die Ausgangsspannung ist also länger auf negativem Sättigungswert als auf dem positiven. Den Quotienten der beiden Halbperioden nennt man *Tastverhältnis* q

$$q := \frac{T_2}{T_1} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \tag{21}$$

1.4 Schwingungsgleichungen

Es wird von der folgenden allgemeinen Schwingungsgleichung ausgegangen:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x + 2\delta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x + \omega_0^2 x = F(t) \tag{22}$$

Im Experiment entspricht x der Spannung und t der Zeit.

1.4.1 Harmonische Schwingung ohne äußere Anregung

Wenn es keine äußere Anregung gibt, so ist $F = 0$. Es wird zunächst der Fall betrachtet, daß δ ebenfalls 0 ist, also keine Dämpfung vorliegt. Dann vereinfacht sich (22) zu

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x + \omega_0^2 x = 0$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi)$$

wobei ω_0 die Eigenfrequenz des Systems ist, A die maximale Amplitude und ϕ eine Phasenverschiebung, die sich aus den Anfangswerten ergibt.

Ist die Dämpfung nicht null, so erhalten wir mit

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \tag{23}$$

die allgemeine Lösung

$$x(t) = A_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + A_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

In Abhängigkeit des Vorzeichens des Wurzelargumentes von λ führt man folgende Fallunterscheidung durch:

$\delta < \omega_0$ *Schwingfall:* Hier ist die Dämpfung klein und man erhält ein negatives Wurzelargument. Dadurch werden die $\lambda_{1,2}$ imaginär. Als Lösung ergibt sich

$$x(t) = A\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t + \phi)$$

Das System schwingt mit der Frequenz $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ und einer exponentiell abfallenden Amplitude $A\mathrm{e}^{-\delta t}$.

$\delta = \omega_0$ *Aperiodischer Grenzfall:* Es kommt zu keiner Schwingung mehr, sondern die Amplitude fällt nur noch exponentiell ab. Man erhält als Lösung

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)\mathrm{e}^{-\delta t} \tag{24}$$

Je nach Anfangsbedingungen kann x(t) einmal durch die x–Achse laufen.

$\delta > \omega_0$ *Kriechfall:* Es kommt zu keiner Schwingung mehr und die Abklingzeit der Amplitude ist größer als beim aperiodischen Grenzfall. Man erhält als Lösung:

$$x(t) = A_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + A_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$$

Für den Schwingfall ist als charakteristische Größe das *logarithmische Dekrement* Λ definert als

$$\Lambda = \delta T = \frac{2\pi\delta}{\omega}$$

Als *Relaxationszeit* $\mathcal{T}$ bezeichnet man die Zeit, in der die Amplitude auf das $\frac{1}{\mathrm{e}}$–fache ihres Wertes abgeklungen ist

$$\mathcal{T} = \frac{1}{\delta}$$

Analog ist die *Relaxationsfrequenz* ν gegeben durch

$$\nu = \frac{1}{\mathcal{T}} (= \delta)$$

1.4.2 Harmonische Schwingung mit äußerer Anregung

Hier soll der Term $F(t)$ in DGL (22) eine periodisch angreifende Kraft repräsentieren. Der Einfachheit halber rechnet man mit einer Cosinus–Schwingung

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

Als Lösung erhält man

$$x(t) = A(\omega) \cos(\omega t - \psi(\omega))$$

mit einer frequenzabhängigen Amplitude

$$A(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

und einer Phasenverschiebung

$$\psi(\omega) = arctan\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Die maximale Amplitude liegt bei der *Resonanzfrequenz*

$$\omega_{Res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} < \omega_0 \tag{25}$$

und dort einen Wert von

$$A_{Res} = A(\omega_{Res}) = \frac{F_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Für $A(0)$, die sogenannte *statische Auslenkung* bzw. für das asymptotische Verhalten mit $\omega \to \infty$ gilt

$$A_0 = A(0) = \frac{F_0}{\omega_0^2} \qquad \lim_{\omega \to \infty} A(\omega) \to \frac{1}{\omega^2}$$

Bergmann-Schaefer Abb (IV,98) Seite 193

Abb.11 Resonanzkurven mit $\delta_1 < \delta_2 < \delta_3$

Die Phasendifferenz liegt für kleine Frequenzen bei null und geht für große Frequenzen gegen π. Bei $\omega = \omega_0$ hat sie Wert $\frac{\pi}{2}$.

Bergmann-Schaefer Abb (IV,99) Seite 194

Abb.12 Phasenverschiebung mit $\delta_1 < \delta_2 < \delta_3$

Als *Resonanzüberhöhung* R bezeichnet man das Verhältnis von Resonanzamplitude zur statischen Auslenkung A_0

$$R = \frac{A_{Res}}{A_0} = \frac{\omega_0^2}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Für kleine Dämpfungen wird (12) zu

$$R \cong \frac{\omega_0}{2\delta} =: Q$$

wobei Q als *Güte* des Systems bezeichnet wird. Zusätzlich definiert man die *Halbwertsbreite* $\Delta\omega_H$ der Resonanzkurve durch

$$\Delta\omega_H = \omega_2\left(\frac{A_{Res}}{\sqrt{2}}\right) - \omega_1\left(\frac{A_{Res}}{\sqrt{2}}\right) \cong 2\delta$$

also entspricht die relative Halbwertsbreite dem Reziproken der Güte,

$$\frac{\Delta\omega_H}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

d.h. je schärfer der Resonanzpeak, desto besser die Güte.

1.4.3 Anharmonische Schwingungen ohne äußere Anregung

Bei nicht linearen Schwingungen ist die Federkonstante nicht mehr konstant, sondern abhängig vom einem Parameter. Zum Beispiel ist beim Schwerependel für große Auslenkungen $\phi > \sin\phi$ und die rücktreibende Kraft nicht mehr proportional zur Auslenkung. Die Eigenfrequenz ist in diesem Fall abhängig von der Amplitude. Die DGL, die diese Problemstellungen beschreiben, haben i.a. keine analytische Lösung, sondern führen z.B. auf elliptische Integrale. Man behilft sich dann in den meisten Fällen mit numerischen Lösungen.

1.4.4 Anharmonische Schwingungen mit äußerer Anregung

Ein besonderer Effekt tritt bei den Resonanzkurven auf. Im Gegensatz zu der harmonischen Schwingung, wo es einen eindeutigen Zusammenhang zwischen Frequenz und Amplitude gibt, existiert bei den anharmonischen Schwingungen ein Frequnzbereich auf, wo die Amplitude bis zu drei verschiedene Werte annehmen kann. Dies wird durch das sogenannte *Überhängen* der Kurve verursacht.

Anleitung Seite 19

Abb.13 Resonanz bei anharmonischen Systemen

Wird die Resonanzkurve von kleinen Frequenzen aus durchlaufen, so steigt die Amplitude an, bis Punkt B erreicht wird. Dort kommt es zum instantanen Sprung auf Punkt B von wo aus die Kurve weiter zu kleineren Amplituden durchlaufen wird. Daß die Amplitude nicht schon zwischen A und B springt liegt daran, daß dann bei steigender Frequenz die Amplitude wieder zunehmen würde, noch bevor die Resonanzfrequenz durchlaufen wurde. Dies würde einen instabilen Zustand hervorrufen.

Auf dem Rückweg zu kleineren Frequenzen gilt aus den gleichen Kontinuitätsüberlegungen, daß die Amplitude erst am Punkt A auf die untere Kurve abfällt. Insgesamt erhält man also eine Hysterese der Amplitude bgzl. der Frequenz. Außerdem gibt es jeweils bei den Unstetigkeitsstellen einen Sprung in der Phasenverschiebung.

1.5 Phasenportraits

Trägt man $x(t)$ gegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ parametrisiert durch t auf, so erhält man sogenannte Phasenportraits. Aus ihnen lassen sich charakteristische Eigenschaften des Systems ablesen.

Abb.14 Phasenportraits harmonisch a) ungedämpt b) gedämpft c) anharmonisch

1.6 Schaltung für Schwingungsgleichungen

1.6.1 Harmonische Schwingung

Um auf dem OPs eine harmonische Schwingung zu simulieren wird folgende Schaltung benutzt

Abb.15 Schaltung für harmonische Schwingung

An Punkt B liege die Spannung $-U$ an. Da die Einheit OP–R_4–C_2 einen Integrator darstellt, muß nach Gleichung (11) an Meßpunkt C die Spannung $2RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U$ anliegen. Die Einheit OP–R_2–R_3 hat die Funktion eines Inverters, so daß an Meßpunkt D die

Spannung $-2RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U$ abfällt. Am Kondensator C_1 fließt der Strom I_4

$$I_4 = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-2RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U) = -2C^2R\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}U$$

Für Punkt A gilt:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$$

Für die anderen Ströme erhält man

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{U_k}{R} \\ I_2 &= -\frac{U}{2R} \\ I_3 &= -\frac{2RC}{R_d}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}U + \frac{1}{R_dC}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U + \frac{1}{4R^2C^2}U = \frac{1}{2R^2C^2}U_k \tag{26}$$

Der Vergleich mit der allgemeinen DGL (22) liefert

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{1}{4R^2C^2} && (27) \\ \delta &= \frac{1}{2R_dC} && (28) \\ Q &= \frac{R_d}{2R} \end{aligned}$$

Der Kehrwert des Widerstandes R_d stellt also eine Dämpfung dar. Als Fallunterscheidung ergibt sich:

$R_d < R$ Kriechfall

$R_d = R$ Aperiodischer Grenzfall

$R_d > R$ Schwingfall

1.6.2 Anharmonische Schwingung

Bei der anharmonischen Schwingung wird der Widerstand R_5 durch zwei Widerstände ersetzt, zwischen den zwei entgegengesetzt parallel geschaltete Dioden auf Masse gelegt werden.

Abb.16 Schaltung für anharmonische Schwingung

Da die Dioden keinen Ohm'schen Widerstand darstellen, sondern erst ab Spannungen von ca. 0.6[V] merklich Strom leiten, bildet diese Gruppe einen Spannungsabhängigen Widerstand $R = R(U)$. Damit die Funktion symmetrisch ist (also $R(U) = R(-U)$), benutzt man zwei Dioden, so daß immer eine der beiden leitet.

Abb.17 Spannungsabhängigkeit des Widerstands

2 Auswertung

Bei allen Bauteilen wurde — insofern vorhanden — der handschriftliche Wert für die Rechnung benutzt, sonst der aufgedruckte. Als Fehler wurden immer 2 % angenommen. Beim Fehler baim Ablesen vom Oszilloskop betrug ca. ein Fünftel Skalenteil (entspricht 2 [mm]) und Stoppen von Zeiten ca. 0.2[s].

2.1 Rechteckgeneratoren

2.1.1 Symmetrisch

Die Schaltung Abb.10 wurde mit folgenden Werten realisiert:

$$\begin{aligned} C &= 10.0 \pm 0.2[nF] \\ R_1 &= 10.3 \pm 0.2[k\Omega] \\ R_2 &= 105 \pm 2[k\Omega] \\ R_3 &= 1.01 \pm 0.02[M\Omega] \end{aligned}$$

Aus Formel (20) wurde der theoretische Wert der Frequenz berechnet

$$\nu_{theo} = 277 \pm 10[Hz]$$

Im Experiment wurden auf dem Oszilloskop $7.6 \pm 0.2[cm]$ bei einer Zeilenablenkung von $0.5[\frac{ms}{cm}]$ für eine Schwingung gemessen. Das führt zum Ergebnis

$$\begin{aligned} T &= 3.8 \pm 0.1[s] \\ \Longrightarrow \nu_{mess} &= 263 \pm 7[Hz]. \end{aligned}$$

also eine innerhalb der Fehlergrenzen liegende Übereinstimmung. Als nächstes wurde das Arbeitsdiagramm des Rechteckgenerators aufgenommen. Dabei wurde die x–Ablenkung des Oszilloskops mit U_{E-} verbunden und die y–Ablenkung mit U_A.

Abb.18 Arbeitsdiagramm des Rechteckgenerators

Der theoretische Wert für U_{E-} ergibt sich nach Formel (14) zu

$$\max(U_{E-})_{theo} = 1.16 \pm 0.09[V]$$

Gemessen wurde $U_S = \max(U_A) = 13.0 \pm 1[V]$ und

$$\max(U_{E-})_{mess} = 1.15 \pm 0.1[V]$$

Der Meßwert stimmt hier sogar sehr gut mit der Theorie überein.

2.1.2 Asymetrisch

Beim asymmetrischen Rechteckgenerator wurden folgende Bauteile benutzt

$$\begin{aligned} C &= 10.0 \pm 0.2[nF] \\ R_1 &= 10.3 \pm 0.2[k\Omega] \\ R_2 &= 105 \pm 2[k\Omega] \\ R_3 &= 108 \pm 2[k\Omega] \\ R_4 &= 1.05 \pm 0.02[M\Omega] \end{aligned}$$

Nach Formel (21) ergibt sich das theoretische Tastverhältnis zu

$$q_{theo} = 0.092 \pm 0.002$$

Gemessen wurden die obere Flanke mit $a = 0.3 \pm 0.1$ und untere Flanke mit $b = 2.5 \pm 0.1$ in willkürlichen Einheiten. Dies ergibt ein Tastverhältnis von

$$q_{mess} = 0.12 \pm 0.04$$

also auch hier eine gute Übereinstimmung.

2.1.3 Integrator (Dreiecksschwingung)

Bei dieser Messung wurden für den Integrator die Bauteile

$$\begin{aligned} C &= 10.0 \pm 0.2[nF] \\ R &= 205 \pm 4[k\Omega] \end{aligned}$$

benutzt. Die Bauteile des Rechteckgenerators sind 2.1.1 zu entnehmen. Nach Formel (12) ergibt sich mit $\Delta t = 3.8 \pm 0.2[ms]$ für eine Flanke, $U_E = 13 \pm 1[V]$ (beide Werte aus 2.1.1) eine maximale Spannungsamplitude von

$$U_{Atheo} = 6 \pm 0.6[V]$$

Gemessen wurde auf dem Oszilloskop

$$U_{Amess} = 5.8 \pm 0.2[V]$$

2.2 Schwingungen ohne äußere Anregung

Da der benutzte x–y–Schreiber kein Zeitnormal besitzt, wurde mithilfe eines Integrators, an dem eine kleine konstante Eingangsspannung angelegt wurde, eine linear mit der Zeit steigende Spannung erzeugt, die auf den x–Eingang des Schreibers gegeben wurde. Bei den einzelnen Messungen wurde dann mit einer Stoppuhr die Zeit gemessen, die verstrich, bis der Stift eine gewisse Strecke zurückgelegt hat und damit eine Geschwindigkeit berechnet. Die Schaltung zur Simulation der Gleichung (26) wurde mit den Bauteilen

$$\begin{aligned} C &= 10.0 \pm 0.2[\mu F] \\ R &= 10.1 \pm 0.2[k\Omega] \end{aligned}$$

durchgeführt, um die Schwingungen auf dem x–y–Schreiber messen zu können, denn diese Änderung reduziert die Frequenz auf unter 1[Hz].

2.3 Harmonische Schwingung

2.3.1 Schwingfall (Plot 1)

Hier wurde ein großer Dämpfungswiderstand

$$R_d = 1.03 \pm 0.02[M\Omega]$$

benutzt, was einer kleinen Dämpfung entspricht. Aus Formel (27) erhält man die theoretische Frequenz:

$$\omega^2 = \frac{1}{4R^2C^2} \quad \Longrightarrow \quad \nu_{theo} = \frac{1}{4\pi RC} = 0.787 \pm 0.06[Hz]$$

Aus Formel (28) ergibt sich die theoretische Dämpfung zu

$$\delta_{theo} = (4.85 \pm 0.01)10^{-2}[s^{-1}]$$

Aus dem Plot ergibt sich eine Periodendauer von $T = 1.28 \pm 0.01[s]$ also eine Frequenz von

$$\nu_{mess} = 0.781 \pm 0.06[Hz]$$

Für die Ermittlung der Dämpfung wurden jeweils Amplituden miteinander verglichen und ihre Zeitdifferenz berücksichtigt. Man erhält:

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 \mathrm{e}^{\delta t} \\ U(t+\Delta t) &= U_0 \mathrm{e}^{\delta(t+\Delta t)} \\ \Longrightarrow \frac{U(t)}{U(t+\Delta t)} &= \mathrm{e}^{\delta \Delta t} \\ \Longrightarrow \delta &= \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{U(t)}{U(t+\Delta t)} \end{aligned} \tag{29}$$

Tabelle 1 Schwingfall $R_d = 1.03[M\Omega]$

Peak	U[V]	t[s]	$\Delta t[s]$	$\delta[s^{-1}]$
1	11.3 ± 0.3	1.48 ± 0.04		
			5.33 ± 0.18	$(4.9 \pm 0.8)10^{-2}$
5	8.7 ± 0.3	6.81 ± 0.16		
			6.69 ± 0.23	$(5.0 \pm 0.9)10^{-2}$
10	6.2 ± 0.3	13.5 ± 0.3		
			6.7 ± 0.23	$(4.9 \pm 1.2)10^{-2}$
15	4.5 ± 0.3	20.2 ± 0.5		
			6.7 ± 0.23	$(5.1 \pm 1.7)10^{-2}$
20	3.2 ± 0.3	26.9 ± 0.6		
			6.7 ± 0.23	$(4.3 \pm 2.3)10^{-2}$
25	2.4 ± 0.3	33.6 ± 0.8		

2.3.2 Aperiodischer Grenzfall (Plot 2)

Hier wurde der Dämpfungswiderstand

$$R_d = 10.0 \pm 0.2[k\Omega]$$

benutzt. Beim aperiodischen Grenzfall könnte man im Prinzip (28) zur Berechnung der Dämpfungskonstanten δ heranziehen. Man muß jedoch sicherstellen, daß der Dämpfungswiderstand sehr exakt dimensoniert ist. Rechnet man nach dieser Formel, so erhält man

$$\delta = 5.0 \pm 0.1[s^{-1}]$$

was mit den experimentell gefundenen Werten nicht übereinstimmt. Nimmt man jedoch an, daß die Dämpung schon so groß ist daß es sich schon um den Kriechfall handelt, so muß man nach Formel (23) rechnen

$$\lambda = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -4.3 \pm 0.7[s^{-1}]$$

Bei der obigen Formel wurde die positive Wurzel genommen, da die negative Wurzel betraglich einen größeren Wert darstellt und damit zu einer Schwingung gehört, die schneller abfällt und nur kurz nach dem Einschwingen zu messen ist. Es verbleibt zwar immer noch eine relative große Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment, was jedoch durch die sehr großen berechneten Fehlern der Meßwerte erklärt werden kann.

Tabelle 2 Aperiodischer Grenzfall $R_d = 10[k\Omega]$

Peak	U[V]	t[s]	$\Delta t[s]$	$\delta[s^{-1}]$
5	10.2 ± 0.3	5.95		
			0.39 ± 0.04	2.6 ± 0.3
6	3.7 ± 0.3	6.34		
			0.38 ± 0.04	3.2 ± 0.8
7	1.1 ± 0.3	6.72		
			0.39 ± 0.04	3.6 ± 3.0
8	0.27 ± 0.3	7.11		

Beachte: Laut Definitionen von λ und δ sind die Vorzeichen gerade vertauscht.

2.3.3 Kriechfall (Plot 3)

Beim Kriechfall wurde die Dämpfung weiter erhöht. Es wurde der Dämpfungswiderstand

$$R_d = 5.0 \pm 0.1[k\Omega]$$

benutzt. Als Dämpfung erhält man über (23)

$$\lambda = -1.31 \pm 0.05[s^{-1}]$$

Im Experiment erhielt man δ wieder durch Vergleich der Amplituden mit Formel (29).

Tabelle 3 Kriechfall $R_d = 5[k\Omega]$

Peak	U[V]	t[s]	$\Delta t[s]$	$\delta[s^{-1}]$
1	5.58 ± 0.3	4.14		
			0.52 ± 0.05	-0.85 ± 0.2
2	3.58 ± 0.3	4.66		
			0.51 ± 0.05	-1.22 ± 0.37
3	1.92 ± 0.3	5.17		
			0.52 ± 0.05	-1.39 ± 0.7
4	0.93 ± 0.3	5.69		

2.3.4 Phasenportraits (Plot 4,5,6)

Um die Phasenportraits zu erhalten wurde der x–Eingang des Schreibers mit U und der y–Eingang mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U$ verbunden.

Plot 4 *Schwingfall* Man sieht gut die Spirale mit exponentiell abfallendem Radius.

Plot 5 *Aperiodischer Grenzfall* Neben einer schnellen Auslenkphase im 1. Quadranten (schwache Linienstärke entspricht hoher Stiftgeschwindigkeit) sieht man eine langsamere Abklingphase im 2. Quadranten (starke Linien).

Plot 6 *Kriechfall* Im Prinzip liegt hier das gleiche das Verhalten wie in Plot 5 vor. Nur ist die maximale Auslenkung in $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U$–Richtung wegen der stärkeren Dämpfung nicht mehr so groß. Außerdem ist im 2. Quadranten die Steigung der Kurven kleiner, was an der größeren Relaxationszeit liegt.

2.4 Anharmonische Schwingung

Leider lassen sich für den anharmonischen Fall kaum quantitative Ergebnisse ermitteln, da die Eigenfrequenz nicht konstant ist. Außerdem liegen wegen der Nichtlösbarkeit, der zugrundeliegenden DGL keine theoretischen Werte zum Vergleich vor. Die Messungen wurden mit Schaltung Abb.?? durchgeführt.

2.4.1 Schwingfall (Plot 7)

Es fällt auf, daß die Auslenkugen für große Amplituden etwas 'bauchiger' wirken als im harmonischen Fall. Für kleinere Amplituden gehen sie fast in eine normale harmonische Schwingung über.

2.4.2 Aperiodischer Grenzfall (Plot 8)

Hier sieht man ganz deutlich, daß ein anharmonischer Fall vorliegt, denn die Kurve fällt für große Amplituden fast *linear* ab und geht erst für kleinere Amplituden in einen exponentiellen Abfall über.

2.4.3 Kriechfall (Plot 9)

Auch hier sieht man den linearen Abfall. Allerdings ist wegen der großen Dämpfung die benötigte Zeit zum kompletten Abklingen größer.

2.4.4 Phasenportraits (Plot 10,11,12)

Plot 10 *Schwingfall:* Man sieht gut, daß die Kurven mit abnehmender Amplitude in Ellipsen übergehen. Trotzdem erhält man hier keine Kreise wie im harmonischen Fall, da in diesem Phasenportrait die Achsen unterschiedlich skaliert sind.

Plot 11 *Aperiodischer Grenzfall:* Auch hier erhält man im 1. Quadranten während der Auslenkphase große Phasengeschwindigkeiten, die im 2. Quadranten abnehmen.

Plot 12 *Kriechfall:* Hier dauert das Abklingen wieder länger als im aperiodischen Grenzfall.

2.5 Schwingungen mit äußerer Anregung (Resonanz)

In diesem Versuch wurde eine äußere Sinus–förmige Anregungsspannung $U_k(t)$ an die Schaltung Abb.15 für die harmonische Schwingung bzw. Abb.16 für die anharmonische Schwingung angelegt. Sie wurde mit einem Funktionengenerator erzeugt, der eine geeichte Frequenzskala besaß. Über einen Frequenz–Spannungs–Wandler (siehe 2.5.1) wurde diese Frequenz auf die x–Auslenkung des Schreibers gegeben. Durch Einstellen mehrerer Frequenzen und Ablesen der Stiftstellung wurde anschließend die Frequnzskala geeicht (siehe 2.5.2). Die Amplitude $U(t)$ des Schwingkreises wurde über einen Gleichrichter (19) mit der y–Auslenkung verbunden.

2.5.1 Frequenz–Spannungs–Wandler und Gleichrichter

Abb.19 Frequenz–Spannungs–Wandler

Der Frequenz–Spannungswandler arbeitet wie folgt: sei zunächst Diode 1 in Durchlaßrichtung gepolt. Es gilt:

$$I_E = C_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U_E$$

$$
\begin{aligned}
I_A &= I_R + I_{C_2} = \frac{U_A}{R} + C_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U_A \\
\text{und} \qquad I_E &= -I_A \\
\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U_A + \frac{1}{RC_2} U_A &= -\frac{C_1}{C_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U_E
\end{aligned}
$$

Die Lösung der DGL ergibt

$$U_A(t) = RC_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U_E \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC_2} t} - 1 \right)$$

Für eine Sinus–förmige Schwingung gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U_E \propto \omega U_E$$

Da für Diode 2 gilt die gleichen Berechnungen durchgeführt werden können, gilt unter Vernachlässigung des Exponentialterms für $t \gg RC_2$ (also für nach dem Einschwingen) und bei konstanter Eingangsspannung U_E

$$U_A(t) \propto \omega$$

Man erhält also eine linearen Zusammenhang zwischen Frequenz der Eingangsspannung und und der Amplitude der Ausgangsspannung.

Mit dem Gleichrichter wird die Ausgangsspannung $U_A(t)$ des Schwingkreises gleichgerichet, damit sie auf dem x–y–Schreiber dargestellt werden kann.

Abb.20 Gleichrichter

Die Diode läßt Strom nur in einer Richtung durch, so daß man am Ausgang nur Amplituden einer Orientierung erhält. Der Kondensator dient zur Glättung der Ausgangsspannung.

2.5.2 Eichung der Frequenzskala

Bei der Eichung der Frequenzskala wurden die x-Werte 4 [cm] vom linken Rand des Millimeterpapiers aus gemessen. Die Frequenz wurde am Funktionengenerator abgelesen.

Tabelle 4 Eichung der Frequenzskala

$\nu[Hz]$	$x[cm]$
100	0.3
200	1.7
300	3.3
400	4.8
500	6.5
600	8.1
700	9.7
800	11.3
900	12.8
1000	14.3

Man erhält als Eichgerade

Abb.21 Eichgerade der Frequenzmessung

An der Eichgeraden sieht man, daß es im Prizip reicht die Frequenz an zwei Punkten zu messen und alle dazwischen liegenden Frequenzen zu interpolieren.

2.5.3 Harmonische Schwingung (Plot 13,14,15)

Die Resonanzkurve wurde für 3 verschiedene Dämpfungswiderstände aufgenommen. Für diese Dämpfungen ergeben sich die theoretische Resonanzfrequenz ν_{Res} und Resonanzüberhöhung R_{Res} aus (25), (12), (27) und (28) zu

$$\nu_{Res} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{2R_D^2C^2}}$$

$$R_{Res} = \frac{R_D}{4R^2C\sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{4R_D^2C^2}}}$$

Tabelle 5 Resonanzfrequenzen

Plot	$R_D[k\Omega]$	$R_{Res}[1]$	$\nu_{Restheo}[Hz]$	$\nu_{Resmess}[Hz]$
13	1025 ± 20	51.3 ± 1.4	796 ± 23	772 ± 12
14	330 ± 7	16.5 ± 0.5	795 ± 23	769 ± 12
15	100 ± 2	5.0 ± 0.1	788 ± 23	768 ± 12

Die Frequenzen stimmen innerhalb der Fehlergrenzen überein und die Tendenz der fallenden Resonanzfrequenzen für steigende Dämpfungen ist (mit Vorsicht) abzulesen.

2.5.4 Anharmonische Schwingung (Plot 16-20)

Die Resonanz beim anharmonischen System wurde mit 4 verschiedenen Dämpfungswiderständen gemessen. Auffallend ist die abnehmende Differenz der beiden Sprungfrequenzen bei steigender Dämpfung, d.h. die Hysterese nimmt ab. Bei $R_D = 33[k\Omega]$ ist die Hysterese ganz verschwunden.

Tabelle 6 Anharmonische Resonanz

Plot	$R_D[k\Omega]$	$\Delta\nu$
16	1025 ± 20	338 ± 17
17	330 ± 7	319 ± 17
18	100 ± 2	56 ± 17
19	33 ± 0.7	-

Im letzten Plot (20) wurde für $R_D = 1.025[M\Omega]$ die Resonanzkurve für verschiedene Anregungsfrequenzen $U_k(t)$ aufgetragen. Dabei fällt auf, daß mit fallender Anregungsspannung auch die Höhe der Resonanz abnimmt. Die aufgetragene Frequenzskala gilt im Prinzip nur für U_1, da die Frequenzeichnung abhängig von der Eingangsfrequenz ist (U_1 wurde für alle vorherigen Messungen benutzt). U_2 und U_3 wurden über einen Spannungsteiler erzielt und mit dem Oszilloskop gemessen.

Tabelle 7 Variable Anregungsspannung

Nr.	$U[mV]$	$U_{max}[V]$
1	180 ± 10	11.9 ± 0.1
2	80 ± 10	11.0 ± 0.1
3	40 ± 10	8.0 ± 0.1

3 Diskussion

Man kann den Versuch insgesamt als Erfolg bezeichnen, denn in den meisten Fällen gab es eine gute bis sehr gute Übereinstimmung zwischen den theoretischen und praktischen Werten. Bei einigen Messungen sind zwar die Ergebnisse nicht so gut, liegen aber immer noch in den großen Fehlergrenzen, die meistens durch das ungenaue Ablesen vom Millimeterpapier verursacht worden sind. Als sehr fehlerhaft sind nur die folgenden Messungen anzusehen:

- Der Vergleich von theoretischer und gemessener Dämpfung beim aperiodischen Grenzfall der harmonischen Schwingung. Dort sind bei der Auswertung der Kurven die Einflüsse des Einschwingens noch so stark, daß man keinen eigentlichen exponentiellen Abfall messen kann. Wenn sie schließlich in den

Sollverlauf übergehen, sind die Amplituden so klein, daß keine vernünftige Ablesegenauigkeit mehr erreicht werden kann.

- Bei den Resonanzkurven ist keine statische Auslenkung abzulesen, obwohl während des Versuches extra die Null-Linie auf dem Schreiber abgetragen wurde. Dies führt dazu, daß man keine Ausagen über die Resonanzüberhöhung und Güte der Kurven machen kann. Leider konnte der vermeintliche Fehler in der Schaltung, der dieses Problem ausgelöst hat, auch vom Betreuer nicht gefunden werden. Aus diesem Grund konnte die Resonanzkurve bei der Dämpfung, die dem aperiodischen Grenzfall entspricht, (oder noch größeren Dämpfungen) überhaupt nicht aufgenommen werden, denn diese entarteten zu einer Linie, die auf der x–Achse lag.