Zusammenfassung des Vortrages
über

Universelle Leitfähigkeitsschwankungen

im Oberseminar

Quanteneffekte in Metallen

am 29. Mai 1991

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Bei der Suche nach Arahanov–Bohm– und AAS–Oszillationen bei mesoskopischen Proben stieß man auf starke Fluktuationen in der Leitfähigkeit — unabhängig vom Ordnungsgrad und der Größe der Leitfähigkeit selbst — wenn die Länge L der Probe ungefähr gleich der Koheränzlänge L_φ der Elektronen war. Die absolute Größe dieser Fluktationen liegt immer in der Größenordnung $\frac{e}{h^2}$, was mit sich nicht mit Hilfe von herkömmlichen statistischen Mitteln erklären läßt, die kleinere und von den obigen Probenparametern abhängige Werte voraussagt. Ein Erklärungsversuch betrachtet Korrelationen zwischen ähnlichen Trajektorien durch die Probe, welche verhindern, daß sich die Fluktuationen der einzelnen Wege zu stark statistisch ausmitteln. Ein zweiter Ansatz läuft darauf hinaus, die Anzahl der Kanäle durch die Probe zu beschränken und damit die zu starke statistische Auslöschung zu verhindern.

2 Zur Probengeometrie und Nomenklatur

Bei den folgenden Betrachtungen wird angenommen, daß sich die Bewegung eines Elektrons durch die Probe als Zufallsweg beschreiben läßt (*random path*), dessen Verlauf durch Stöße immer wieder verändert wird. Zwischen zwei Stößen bewegt sich das Elekron mit definiertem Wellenvektor $\vec{k}$ und damit auch mit definierter Phase $\varphi(\vec{r}, t)$.

Abb.1 Schematischer Aufbau der Probe

Bei Stößen jedoch kann sich sowohl der Wellenvektor als auch die Phase ändern, wobei es wichtig ist, ob diese Änderung *reproduzierbar* oder *zufällig* ist.

- Reproduzierbare Veränderungen der Phase und der Richtung, die hauptsächlich durch elastische Streuung an Gitterfehlstellen oder Verunreinigungen hervorgerufen werden, haben keinen Einfluß auf die Koheränz der Wellenfunktion, d.h. wenn sich das Elektron auf zwei verschiedenen Wegen (Wellenfunktionen Ψ_1 und Ψ_2) von A nach B bewegen kann, so ergibt sich die Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Zielpunkt durch

$$\begin{aligned} |\Psi(B)|^2 &= |\Psi_1(A)\mathrm{e}^{i\varphi_1} + \Psi_2(A)\mathrm{e}^{i\varphi_2}|^2 \\ &= |\Psi_1(A)|^2 + |\Psi_2(A)|^2 + \underbrace{|\Psi_1(A)\Psi_2(A)|\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}_{\text{Interferenz}} \end{aligned} \qquad (1)$$

  wobei φ_1 und φ_2 die Gesamtphasen sind, die sich auf den beiden Wegen akkumulieren. Der Interferenzterm kann zur Verstärkung bzw. zur Auslöschung der Wellenfunktion führen und ist Ursache der quantenmechanischen Effekte wie Aharanov–Bohm–Oszillation, ASS–Oszialltion oder universelle Leitfähigkeitschwankungen (im folgenden ULS).

- Nach zufälligen Veränderungen (meist durch inelastische Streuung mit Phononen oder Spinstreuung) ist die Phase des Elektrons nicht mehr eindeutig definiert, was dazu führt, daß die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Wellenfunktionen am Zielpunkt klassisch berechnet werden müssen und der Inteferenzterm in (1) entfällt.

Durch die obigen Phänomene definert man nun die Längen L, L_φ und l folgendermaßen:

L Kantenlänge der Probe in jeder Dimension,

L_φ Mittlere freie Weglänge, die ein Elektron zurücklegen kann, bis es *inelastisch* gestreut wird,

l Mittlere freie Weglänge, die ein Elektron zurücklegen kann, bis es *elastisch* gestreut wird.

Der Effekt der ULS bezieht sich auf ungeordnete mesoskopische Systeme charakterisiert durch $L_\varphi \simeq L$ (kleine Proben, kleine Temperaturen) und $l \ll L$ (viele Gitterfehlstellen, amorph). Die Probe an sich kann verschiedene Form und Dimension haben. Eine Dimension wird hierbei als existent angesehen, wenn die Ausdehnung der Probe in dieser Dimension größer als die mittlere freie elastische Weglänge l ist.

3 Die Entdeckung des Effektes

Auf der Suche nach Aharanov–Bohm–Oszillationen mit Periode $\frac{h}{e}$ wurde 1983 der Widerstand eines Goldring mit Durchmesser $245[nm]$, Breite $30[nm]$ und Höhe $39[nm]$ unter dem Einfluß eines zur Ringachse parallelen Magnetfeldes bei Temperaturen von $0.047[K]$ bis $0.730[K]$ gemessen (siehe Zusammenfassungen in [1],[2] und [3]).

[3]p.389

Abb.2 Fluktuationen am Goldring

Bei der Auswertung der Meßdaten stieß man zwar nicht auf die Arahanov–Bohm–Oszillationen, aber auf Fluktuationen der Größenordnung $\frac{e^2}{h}$, die zufälligen Verlauf hatten (Abb.2a) und innerhalb gewisser Temperaturgrenzen reproduzierbar waren. In der Fourier-analyse (Abb.2b) der Kurven schlagen sich die Fluktuationen im starken Peak bei Periode 0 nieder. Imry schlug vor, daß es sich bei diesem Effekt ebenfalls um einen Aharanov–Bohm–Effekt handelt, allerdings hervorgerufen durch den Fluß des Magnetfeldes durch den *Leiter* selbst und nicht durch das Innere des Ringes.

Abb.3 Arahanov–Bohm–Effekt im Leiter

Wegen der geringen Größe der Proben ist es nicht mehr möglich, den Flu nur durch das Innere des Ringes zu leiten, sondern es gibt Streufelder, die in den Leiter hineinreichen. Da das Leitungsmaterial, das den Ring bildet, viele parallel verlaufende Kanäle aufweist, die alle unterschiedlichen Fluß einschließen (Abb.3), ist die Phasendifferenz sehr abhängig von

- der Konfiguration der Streupunkte und
- dem äußeren Magnetfeld.

Wird das angelegte Magnetfeld B verändert, so ändert sich das Vektorpotential A und damit auch die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ eines *jeden einzelnen* Weges entsprechend (2), und zwar unterschiedlich stark, weil der eingeschlossene Fluß Φ auch unterschiedlich groß ist.

$$\Delta\varphi = \frac{e}{\hbar} \oint \vec{A} d\vec{r} = \frac{2\pi\Phi}{\frac{h}{e}} \qquad (2)$$

Dies hat zur Folge, daß die gemessene Leitfähigkeit (bzw. der gemessene Widerstand) *anscheinend* willkürliche Schwankungen bei Veränderung des Magnetfeldes aufweist. Diese Schwankungen beruhen jedoch auf der speziellen Konfiguration der Störstellen in der vorliegenden Probe und sind deshalb reproduzierbar, d.h. sie ergeben den gleichen Verlauf bei mehrmaligen Durchlaufen der Magnetfeldstärke und unterscheiden sich daher grundlegend vom thermischen Rauschen. Diese Eigenschaft der ULS wird auch als *magnetischer Fingerabdruck* bezeichnet.

Nach (2) ist ein Fluß von $\Phi_0 := \frac{h}{e}$ völlig ausreichend, um eine Phasenverschiebung von 2π hervorzurufen. Nimmt man an, daß die Probe auf einer Fläche L^2 dem Magnetfeld B ausgesetzt ist, so ergibt sich die minimale Flußdichtenänderung ΔB_C, die nötig ist, um Schwankungen von $\frac{e^2}{h}$ zu erreichen, zu

$$\Delta B_C = \frac{\Phi_0}{L^2} = \frac{h}{eL^2}. \tag{3}$$

Bei Flußdichtenänderungen $\Delta B < B_C$ nehmen die Schwankungen sehr schnell ab. Dies ist in Abb.2b zu erkennen, wo die größten Spektralbeiträge bei $\frac{1}{H} < 2[T^{-1}]$ liegen.

Die Reproduzierbarkeit der Schwankungen wird aufgehoben, wenn die Probe so stark erwärmt wird, daß sich die Störstellenkonfiguration ändern kann ($T \sim 1[K]$). Da jede einzelne Störstelle von einem Anteil aller möglichen Wege durchquert wird, kann schon durch Verschiebung von relativ wenigen Störstellen das Muster der Fluktuationen komplett verändert werden (siehe 6).

4 Versuch einer Erklärung

4.1 Leitfähigkeit einer Störstellenkonfiguration

Für die Berechnung der Leitfähigkeit G betrachten wir den schematischen Aufbau der Probe in Abb.1.

Abb.4 Randbedingungen

Links und rechts vom Leiter befinden sich idealisiert unendlich groe Reservoirs an Leitungselektronen. Durch Anlegen einer Spannung kommt es zu einem Gradienten des chemischen Potentials (hier $\mu_R > \mu_L$) und einzelne Elektronen bewegen sich zur rechten Seite. Der

Wellenvektor $\vec{k}$ eines jeden Elektrons wird nun aufgespalten in seinen Anteil parallel zum Gradienten des Potentials (also parallel zum elektrischen Feld $\vec{E}$) und sekrecht dazu:

$$\vec{k} = \vec{k}_{||} + \vec{k}_{\perp}$$

Der parallele Anteil, der für den Ladungstransport durch die Probe sorgt, muß keiner Randbedingung genügen, da die Reservoirs jeden Wellenvektor absorbieren können. In den verbleibenden $d-1$ Dimensionen, die durch $\vec{k}_{\perp}$ repräsentiert werden, müssen Randbedingungen an den Probenwänden angesetzt werden (siehe Abb.4). Die Anzahl der Zustände pro Dimension ergibt sich zu $N_1 \simeq Lk_F$ und damit die Gesamtanzahl der *Kanäle* zu

$$N = (Lk_F)^{d-1}. \tag{4}$$

Im folgenden sollen die möglichen Zustände bei Eintritt in die Probe mit α_i und die bei Austritt aus der Probe mit β_j bezeichnet werden. Nach einer Theorie von LANDAUER, die von FISHER, LEE und BÜTTIKER verallgemeinert worden ist (siehe auch [7]), ergibt sich die Leitfähigkeit aus der Summe der Transmissionskoeffizienten $t_{\alpha_i\beta_j}$, die angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Elektron aus dem Zustand α_i beim Durchqueren des Leiters in den Zustand β_j übergeht:

$$G = \frac{e^2}{h}\sum_{\alpha_i\beta_i}|t_{\alpha_i\beta_j}|^2 = \frac{e^2}{h}\text{spur } tt^+ \tag{5}$$

Die Transmissionskoeffizienten erhält man durch Summierung der Wahrscheinlichkeitsamplituden $A_{\alpha_i\beta_j}(k)$ aller Feynmanpfade P_k, die das Elektron beim Durchqueren der Probe nehmen kann

$$t_{\alpha_i\beta_j} = \sum_{k=1}^{M_{ij}} A_{\alpha_i\beta_j}(k)$$

wobei angenommen wird, das die Gesamtanzahl M_{ij} der Feynmanpfade wegen der hohen elastischen Streurate sehr gro ist. Eine weitere Berechnungsmöglichkeit für G ergibt sich aus dem Ohmschen Gesetz $G = \sigma L^{d-2}$, $\sigma = \frac{e^2}{h}k_F^{d-1}l$ und (4):

$$G = \frac{e^2}{h}N\frac{l}{L} \tag{6}$$

Durch Vergleich von (5) und (6) sowie der Annahme, daß alle Kanäle gleichberechtigt sind, ergibt sich als Mittel für die Transmissionskoeffizienten

$$|t_{\alpha_i\beta_j}|^2 \approx \frac{N\frac{l}{L}}{N^2} = \frac{l}{LN} \tag{7}$$

4.2 Bildung des Mittelwertes über alle Konfigurationen

Wie oben in (3) geschildert ist eine Veränderung der magnetischen Flußdichte größer als B_C äquivalent mit dem Übergang zu einer neuen Störstellenkonfiguration. Es ist demnach gleichgültig, ob man Veränderungen im Magnetfeld betrachtet oder verschiedene Konfigurationen. Bei den folgenden Herleitungen wird deshalb für die Berechnung von ΔG auf Variationen der Störstellenkonfigurationen zurückgegriffen.

Die Tatsache, daß die Fluktuationen der Leifähigkeit von der Größenordnung $\frac{e^2}{h}$ sind, ist äquivalent zu

$$\Delta G \equiv \sqrt{\langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2} \overset{!}{\simeq} C\frac{e^2}{h}$$

wobei C eine Gröe der Ordnung eins ist, die eine schwache Abhängigkeit von der Dimension d und der Form der Probe zeigt (experimentell liegt der Wert ungefähr zwischen 0.2 und 0.6). Oft betrachtet man auch statt G die einheitenlose Größe $g := Gh/e^2$. Für diese muß dann gelten $\Delta g \simeq C$. Die Mittelwertbildung $\langle \rangle$ läuft dabei über alle möglichen Störstellenkonfigurationen, die die Probe annehmen kann. Nach Ausführung der Variation erhält man für die mittlere Fluktuation der Transmissionskoeffizienten:

$$\Delta \langle |t_{\alpha_i \beta_j}|^2 \rangle = \langle |t_{\alpha_i \beta_j}|^2 \rangle$$

d.h. die Schwankungen der Koeffizienten sind im Mittel genauso groß wie die Koeffizienten selbst. Die Schwankung der Leitfähigkeit ergibt sich nach (5) aus der Überlagerung von N^2 Einzelschwankungen

$$\Delta G' \simeq \frac{e^2}{h}\sqrt{N^2}\Delta \langle |t_{\alpha_i \beta_j}|^2 \rangle = \frac{e^2}{h}\frac{l}{L}$$

also eine falsche Abhängigkeit vom Ordnungsgrad $\frac{l}{L}$ des Systems, weshalb das Ergebnis dieses Ansatzes auch mit $\Delta G'$ bezeichnet wurde.

4.3 Korrektur durch Betrachtung der Reflektion

Das obige Ergebnis veranlaßte Lee [5] dazu, nicht die Wahrscheinlichkeit für die Transmission der einzelnen Zustände zu berechnen, sondern die der Reflektion. Er hatte erkannt, daß die rigorose Mittelung über alle Störstellenkonfigurationen nicht erlaubt ist, weil es Wege gibt, die miteinander korreliert sind. Korrelationen zwischen zwei Wegen können z.B. auftreten, wenn sie sich bei der Durchquerung der Probe berühren oder sogar kreuzen. Diese Schwierigkeiten treten jedoch nur deswegen auf, weil die Elektronen auf ihrem Weg sehr oft gestreut werden ($l \ll L$).
Betrachtet man den Teil der reflektierten Elektronen und nimmt zusätzlich an, daß die Reflektion sehr stark ist, so erfahren diese auf ihrem kurzen Weg in die Probe hinein und aus der Probe hinaus nur einen sehr kleinen Anteil der Stöe, die ein transmittiertes Elektron erfährt. Dementsprechend sinkt die Wahrscheinlichkeit für Berührung und Überlappung der Bahnen, so daß hier die Reflektionskoeffizienten $|r_{\alpha_i \beta_j}|^2$ wirklich als unkorreliert angesehen werden können. Definiert man nun den Anteil der 'reflektierten Leitfähigkeit' R durch

$$R = \frac{e^2}{h}\sum_{\alpha_i \beta_j} |r_{\alpha_i \beta_j}|^2$$

und nimmt wegen der Stromerhaltung an, daß

$$G + R = \frac{e^2}{h}N$$

so erhält man äquivalent zur Herleitung von G'

$$\langle |r_{\alpha_i \beta_j}|^2 \rangle \simeq \frac{1}{N}\left(1 - \frac{l}{L}\right).$$

Nach Voraussetzung ist jedoch wegen des geringen Ordnungsgrades der Probe $l \ll L$, so daß mit

$$\Delta R = \frac{e^2}{h} \quad (= \Delta G)$$

das gewünschte Ergebnis folgt (die Gleichheit von ΔG und ΔR ergibt sich aus der Stromerhaltung).

4.4 Korrektur durch Korrelationen ähnlicher Pfade

Das Problem der zu starken statistischen Ausmittelung durch Gleichsetzen aller an der Leitung beteiligten Pfade löste Lee zusammen mit Feng [7] noch auf eine andere Weise. Sie stellten die Ähnlichkeit zwischen dem Ladungstransport durch einen Leiter und der Lichtstreuung in einem kolloiden Medium heraus. In beiden Fällen werden einfallende Wellen, die durch einen eindeutigen Parameter gegeben sind (Wellenvektor $\vec{k}_\perp$ beim Stromtransport und Einfallswinkel des Strahls beim optischen Analogon), beim Weg durch das jeweilige Medium sehr oft gestreut. Beim Austritt erhält man eine Mischung von Grundzuständen (wiederum $\vec{k}_\perp$ bzw. Winkel), die durch die Transfermatrix gegeben ist.

Im folgenden werden nun die Korrelationen zwischen Wegen innerhalb von Untermengen betrachtet. In Abb.5 sind 3 der speziellen Wegmengen dargestellt.

Abb.5 Spezielle Wegmengen

Die ähnlichen Wege verlaufen jeweils von Zustand α_i nach β_j und $\alpha_{i'}$ nach $\beta_{j'}$ (im weiteren nur durch die Indizes bezeichnet). In den schraffierten Gebieten (Kontaktstellen) sind die Wellenvektoren der jeweiligen Zustände eingezeichnet. Dabei ist es wichtig zu bemerken, daß der Zustand schon durch die Projektion des Wellenvektors auf die Transversalebene gegeben ist. Demnach sind z.B. in Abb.5(1) die Zustände i und i' bzw. j und j' gleich. In Abb.5(2) sind nur noch die ii'–Zustände gleich, es findet jedoch eine Berührung der Wege statt. In Abb.5(3) sind weder die jj'–Zustände noch die β–Zustände gleich. Dafür überschneiden sich die Wege allerdings zweimal. Die Korrelationen $C_{ii'jj'} := \langle \delta T_{ij} \delta T_{i'j'} \rangle$ mit $T_{ij} := |t_{\alpha_i \beta_j}|^2$ ergeben sich für diese Untergruppen zu:

$$
\begin{aligned}
C^{(1)}_{iji'j'} &= \langle T_{ij} \rangle \langle T_{i'j'} \rangle \delta_{\Delta q_i, \Delta q_j} F_1(L\Delta q_i) \\
C^{(2)}_{iji'j'} &= \frac{\langle T_{ij} \rangle \langle T_{i'j'} \rangle}{g} (F_2(L\Delta q_i)) + F_2(L\Delta q_j)) \\
C^{(3)}_{iji'j'} &= \frac{\langle T_{ij} \rangle \langle T_{ij'} \rangle}{g^2}
\end{aligned}
$$

wobei $\Delta q_i = k_{i_\perp} - k_{i'_\perp}$ und $F_1(x) = x^2/\sinh^2 x$ sowie $F_2(x) = 2x^{-1}(\coth x - x/\sinh^2 x)$. Die Fluktuation der Leitfähigkeit erhält man über

$$
\Delta G = \frac{e^2}{h} \sqrt{\sum_{iji'j'} C_{iji'j'}} \tag{8}
$$

Im Beispiel der Lichtstreuung wurde ein Laser benutzt, um die für die Inteferenz notwendige Koheränzlänge zu erlangen. Die transmittierten Intensitäten in Abhängigkeit des Austrittswinkels konnten dann auf einem Schirm direkt beobachtet werden. Da es jeweils nur genau *einen* Eintrittswinkel gibt, können in den Formeln für die $C^{(i)}$ $i = i'$ und $j = j'$ gesetzt werden.

1. Der erste Term vereinfacht sich zu

$$
C^{(1)}_{ijij} = \langle |t_{\alpha_i \beta_j}|^2 \rangle^2 \quad = (\Delta \langle |t_{\alpha_i \beta_j}|^2 \rangle)^2.
$$

   Er tritt nur dann auf, wenn $\Delta q_i \simeq \Delta q_j$, was dazu führt, daß kleine Veränderungen des Einfallswinkels zu Veränderungen der *gleichen* Größe beim Ausfallswinkel führen. Dieser Effekt (auch *memory effect*) ist experimentell nachgewiesen worden, indem die Probe um kleine Winkel $\delta\Theta < (kL)^{-1}$ gedreht worden ist, und das Muster vor und nach der Drehung miteinander verglichen wurde.

2. Der Term $C^{(2)}$ vereinfacht sich zu

$$
C^{(2)}_{ijij} = \frac{\langle |t_{\alpha_i \beta_j}|^2 \rangle^2}{g}.
$$

   Diese Beiträge sind zwar um Faktor g kleiner als die von $C^{(1)}$, verschwinden aber erst für größere Winkel, was zur Folge hat, daß die Umgebung um einen hellen Punkt ebenfalls etwas heller ist. Das Streumuster ist deswegen nicht so diffus, wie es aufgrund der großen Anzahl von Streuungen erwartet werden könnte, sondern zeigt ein ausgeprägtes fleckenartiges Muster (im englischen *speckle patterns*).

3. Für $C^{(3)}$ erhält man schließlich den Term

$$C^{(3)}_{iji'j'} = \frac{\langle |t_{\alpha_i \beta_j}|^2 \rangle^2}{g^2}$$

der nochmals erheblich kleiner ist als der vorhergehende, aber von *konstanter* Größe, d.h. *jeder* einfallende Strahl ist — wenn auch gering — mit *jedem* ausfallenden Strahl korreliert. Ein experimenteller Nachweis für diesen Beitrag steht noch aus.

Man erkennt an diesem Vergleich, daß die Wichtigkeit von Korrelationen auf jeden Fall durch Experimente erhärtet worden ist. Leider sieht man im Falle des Stromtransportes nach Ausführung der Summation in (8), daß $C^{(1)}$ und $C^{(2)}$ keine ausreichend großen Beiträge liefern, weil sie Terme vom Typ $(l/L)^m$ enthalten. Die Menge $C^{(3)}$ jedoch liefert für die Summe der Korrelationen einen konstanten Wert, so daß sich tatsächlich

$$\Delta G = \frac{e^2}{h}\sqrt{N^4 \frac{\langle |t_{\alpha_i \beta_j}|^2 \rangle^2}{g^2}} = \frac{e^2}{h}\sqrt{N^4 \frac{\left(\frac{l}{LN}\right)^2}{\left(\frac{l}{L}N\right)^2}} = \frac{e^2}{h}$$

ergibt.

4.5 Korrektur durch Reduktion der aktiven Kanäle

Beim dritten Erklärungsversuch (nach Imry [6]) soll die Transmissionsmatrix t etwas genauer betrachtet werden, die angibt wie die Eingangszustände α_i auf die Ausgangszustände β_j abgebildet werden. Wir fassen zu diesem Zweck die α_i zu Vektor $\vec{a}_l$ und die Ausgangszustände β_j zu Vektor $\vec{a}_r$ zusammmen. Es ergibt sich der Zusammenhang (siehe Abb.6):

$$\vec{a}_r = t\vec{a}_l$$

Wie bereits oben gesehen kann die Leitfähigkeit direkt aus der Transfermatrix berechnet werden:

$$G = 2\frac{e^2}{h}\text{spur } tt^+.$$

Die Leitfähigkeit ist also dann bekannt, wenn alle Eigenwerte der Matrix t berechenbar sind.

Abb.6 Schematischer Aufbau eines Vielkanalstreuers

Wie ABRAHAMS, AZHEL, PICHARD und STEPHEN gezeigt haben, kann die Spur von t auf einen Teil der Spur der allgemeineren Matrix T zurückgeführt werden, die auch den Teilchenstrom in Rückrichtung mitbeinhaltet, wobei die von rechtseinlaufenden Zustände mit $\vec{b}_r$ und die links auslaufenden Zustände mit $\vec{b}_l$ bezeichnet werden

$$\begin{pmatrix} \vec{a}_r \\ \vec{b}_r \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \vec{a}_l \\ \vec{b}_l \end{pmatrix}$$

Im Gegensatz zu t ist T multiplikativ, d.h. wenn man die Probe in Abschnitte aufteilt und für diese Abschnitte die entsprechenden T_i bekannt sind, ergibt sich die Gesamtmatrix durch Multiplikation der Einzelmatrizen.

Abb.7 Multiplikative Zerlegung der Transfermatrix

In unserem Beispiel wird die Probe in $L/\Delta x$ Abschnitte der Breite Δx geteilt (siehe Abb.7). Für jeden einzelnen Abschnitt nehmen wir eine Transfermatrix Λ mit N Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ an. Die Größe Δx ist dabei eine Länge von der Ordnung Atomradius, höchstens jedoch l. Die Eigenwerte von $TT^+ = \Lambda^{L/\Delta x}$ ergeben sich zu $x_i = \lambda^i$ und damit die Leitfähigkeit zu

$$g = \frac{e^2}{h} \sum x_i = \frac{e^2}{h} \sum \lambda_i^{L/\Delta x}. \tag{9}$$

An (9) erkennt man, daß die Leitfähigkeit im Grunde durch multiplikative Eigenwerte gebildet wird. Es ist leicht einzusehen, daß nur die Eigenwerte $x_1, \ldots, x_{j_{max}} \simeq 1$ zu berücksichtigen sind. Die einzelnen Λ sind sehr zufällige Matrizen, für die man zeigen kann, daß die Eigenwerte fast äquidistant sind:

$$\lambda_j = 1 - j\delta$$

Die Schrittweite δ erhält man durch die Überlegung, daß für Abmessungen $L > \xi$ nur noch der größte Eigenwert x_1 übrigbleibt, wobei ξ die maximale Lokalisierungslänge aller Zustände in der Probe ist:

$$g = \lambda_1^{\frac{L}{\Delta x}} \stackrel{!}{=} \mathrm{e}^{-\frac{L}{\xi}}$$

Man erhält durch Näherung

$$\delta \simeq \frac{\Delta x}{\xi}$$

und damit für die anderen Eigenwerte (mit der gleichen Näherung)

$$x_j = \mathrm{e}^{-j\frac{L}{\xi}}$$

Die Eigenwerte von TT^+ fallen demnach exponentiell ab, und man braucht nur diejenigen zu betrachten für die z.B. $x_j > 1/e$. Man erhält für den Index j_{max} des kleinsten noch zu berücksichtigenden Eigenwertes:

$$N_{eff} = j_{max} = \frac{\xi}{L} \stackrel{*}{=} N\frac{l}{L}$$

Die Gleichheit bei $(*)$ rührt von der Aussage von THOULESS [8], daß sich die Lokalisierungslänge bei großem Unordnungsgrad zu $\xi = Nl$ ergibt. Die Anzahl der *effektiven Kanäle* reduziert sich demnach von N auf den erheblich kleineren Wert $N_{eff} = N\frac{l}{L}$. Nach der gleichen überlegung wie in (7) ergibt sich schließlich

$$\langle |t_{\alpha_i\beta_j}|^2 \rangle = \frac{N\frac{l}{L}}{N_{eff}^2} = \frac{L}{Nl}$$

und

$$\Delta G = \frac{e^2}{h}\sqrt{N_{eff}^2 \langle |t_{\alpha_i\beta_j}|^2 \rangle} = \frac{e^2}{h}$$

5 Temperaturabhängigkeit

In den obigen Abschnitten wurde vorrausgesetzt, daß die Temperatur, bei der die Leitfähigkeit gemessen wird, so niedrig ist, daß Koheränzlängen von der Größenordnung der Probenlänge erreicht werden. Ansonsten ging die Temperatur nirgendwo explizit in die Rechnungen mit ein. Trotzdem zeigt die ULS eine Abhängigkeit von der Temperatur, die sich folgendermaßen erklären läßt: die Bänder der Probe sind nach THOULESS [8] innerhalb von Energieintervallen $E_C = \hbar/t$ (*Dispersionsenergie*) räumlich miteinander korreliert, d.h. sie erzeugen das gleiche Fluktuationsmuster (dabei ist t die Zeit, die das Elektron zum Durchqueren der Probe braucht). Dieser Tatbestand wurde experimentell dadurch bestätigt, daß in Versuchen mit Halbleitern das chemische Potential durch Verändern der Spannung variert wurde. Erst bei Abweichungen der Spannung $\Delta U > E_C/e$ erhielt man ein neues Fluktuationsmuster (siehe [1]).

Abb.8 Thermische Mittelung

Ist nun die thermische Aufweichung $k_B T$ der Fermikante kleiner als E_C, so trägt nur *ein* Muster zu den Fluktuationen bei (siehe durchgezogene Linien in Abb.8). Dadurch werden die ULS bei Temperaturen $T < \hbar/tk_B$ *temperaturunabhängig.*

Ist jedoch $T > \hbar/tk_B$ (gestrichelte Linien in Abb.8), so tragen auch andere Muster zu den Fluktuationen bei. Man erhält:

$$\Delta G(T) = \frac{1}{\sqrt{N_{Muster}}} \Delta G(T = 0)$$

Mit $N_{Muster} = k_B T / E_C$ erhält man als Temperaturabhängigkeit:

$$\Delta G \propto \frac{1}{\sqrt{T}}$$

Diese Abhängigkeit ist auch experimentell bestätigt worden.

[3]p.401

Abb.9 Temperaturabhängigkeit der ULS

Die Punkte $\circ$ in Abb.9 zeigen für die $T > 0.04[K]$ die Proportionalität zu $T^{-1/2}$. Leider ist die Temperaturunabhängigkeit für $T < 0.04[K]$ nicht zu erkennen, weil zu wenig Meßpunkte bei ausreichend tiefen Temperaturen vorhanden sind. Die Meßreihe $\square$, die die auf dem gleichen Effekt beruhende Temperaturabhängigkeit bei Aharanov–Bohm–Oszillationen wiedergibt, zeigt jedoch deutlich eine Waagerechte bei $T < 0.09[K]$.

6 Verschiebung von Störstellen

Wie wir gesehen haben, ist das Fluktuationsmuster sehr empfindlich gegenüber Veränderungen der Störstellenkonfiguration. Man kann jetzt die Frage stellen, um welchen Betrag sich G ändert, wenn wir genau *eine* Störstelle verschieben. Ein naheliegender Ansatz ist es, ΔG als Überlagerung von N_i Störstellen zu sehen, von denen jede einzelne ΔG_1 beisteuert:

$$\Delta G_1 = \frac{\Delta G}{\sqrt{N_i}}. \tag{10}$$

Es ist klar, daß damit selbst bei mesoskopischen Proben, die Verschiebung einer Störstelle nicht mehr meßbar wäre.
Ein anderer Ansatz betrachtet die Wahrscheinlichkeit, daß die verschobene Störstelle von einem der Feynmanwege getroffen wird, die die Elektronen auf ihrem Weg durch die Probe zurücklegen. Das Verhältnis zwischen $(\Delta G)^2$ und $(\Delta G_1)^2$ ist dann durch das Verhältnis des Streuvolumens eines Weges zum Gesamtvolumen der Probe gegeben:

$$\begin{aligned}\frac{(\Delta G_1)^2}{(\Delta G)^2} &= \frac{\text{Streuvolumen eines Wegabschnitts } * \text{ Anzahl des Abschnitte}}{\text{Volumen der Probe}} \\ &= \frac{(\sigma_0 l)\left(\frac{L}{l}\right)^2}{L^d}\end{aligned}$$

Mit den Zusammenhängen $1/l = n_i\sigma_0$ und $N_i = n_i L^d$ (wobei σ_0 der Wirkungsquerschnitt einer Störstelle und n_i die Störstellendichte ist) ergibt sich:

$$\Delta G_1 = \frac{1}{\sqrt{N_i}}\frac{L}{l}\Delta G$$

also ein Term, der gegenüber dem ersten Ansatz um den beträchtlichen Faktor L/l größer ist. Betrachtet man nun die Verschiebung von m Störstellen, so erhält man

$$\Delta G_m = \begin{cases} \sqrt{m}\Delta G_1 = \sqrt{\frac{m}{N_i}}\frac{L}{l}\Delta G & \text{für } m < \frac{l^2}{L^2}N_i \\ \Delta G & \text{für } m > \frac{l^2}{L^2}N_i \end{cases}$$

Man sieht, daß man schon mit einer *kleinen* Anzahl $m = \frac{l^2}{L^2}N_i$ von Verschiebungen die gleiche Änderung des Fluktationsmuster erreichen kann, die man durch die Verschiebung *aller* Störstellen erlangt hätte.

7 Asymmetrie und Grenzfälle

7.1 Asymmetrie bzgl. des Magnetfeldes

Bei der Bestimmung der Leitfähigkeit in Abhängigkeit des Magnetfeldes stellte man eine Asymmetrie bei Wechsel des Vorzeichens fest, d.h. es gilt

$$G(H) \neq G(-H)$$

Dieser Effekt konnte nicht mithilfe der Herleitung (5) erklärt werden, die (nach ONSAGER) eine Symmetrie für kleinen Ordnungsgrad $l \ll L$ vorraussagt.

Abb.10 4–Punkt–Messung

Der grundlegende Fehler liegt im Unterschied zwischen Betrachtungsweise der Theorie und tatsächlichem Meßaufbau:

- Bei der theoretischen Herleitung geht man von einer *2–Punkt–Messung* aus, bei der von außen ein Gradient des chemischen Potentials erzeugt wird.
- Im Experiment handelt es sich um eine *4–Punkt–Messung*, bei der zwischen den Kontakten 1 und 4 ein konstanter Strom fließt und an den Kontakten 2 und 3 die Spannung gemessen wird. Die Asymmetrie des Aufbaus führt nun dazu, daß nicht nur die Hauptdiagonalenelemente der tensoriellen Widerstandes R_{xx}, sondern auch Elemente des Typs R_{xy} gemessen werden.

Man stellte fest, daß man $G(H)$ über die Beziehungen

$$\begin{aligned} G_S &= \frac{2}{R_{14,23}(H) + R_{23,14}(-H)} \\ G_A &= \frac{2}{R_{14,23}(H) - R_{23,14}(-H)} \end{aligned}$$

in einen symmetrischen Anteil G_S und einen antisymmetischen Anteil zerlegen kann ($X_{ii',uu'}$ bedeutet, daß die Größe X bei Stromfluß von i nach i' und Spannungsabgriff bei u und u' ermittelt wurde). Dabei erwies sich ΔG_S als *unabhängig* von der Wahl der Spannungsabgriffe, was zu der Vermutung führte, daß der symmetrische Anteil von den Fluktuationen entlang der Strecke L (siehe Abb.10) stammt und der antisymmetrische Teil von den Fluktuationen in den Spannungsabgriffen.

7.2 Der Grenzfall $L > L_\varphi$

Wird die Probengröße groß gegen die Koheränzlänge, so nehmen die Schwankungen der Leitfähigkeit kontinuierlich ab. Man geht von dem Modell aus, die Probe in $N = L/L_\varphi$ Abschnitte der Länge L_φ zerfällt. In jedem einzelnen Abschnitt gilt die Aussage der universellen Leitfähigkeitsschwankungen lokal, so daß man global bei Mittelung über den gesamten Leiter die Anhängigkeit

$$\Delta G = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{e^2}{h} \propto \sqrt{\frac{L_\varphi}{L}} \tag{11}$$

erhält. Es ist damit auch klar, warum bei Proben makroskopischen Größe ($L \simeq 1[cm]$) keine nennenswerten Leitfähigkeitsschwankungen mehr meßbar sind.

7.3 Der Grenzfall $L < L_\varphi$

Eine weitere Einschränkung für die Herleitungen in Kapitel 4 besteht darin, daß immer angenommen wurde, daß die Probenlänge ungefähr *gleich* der Koheränzlänge ist. Es ist jedoch heute auch schon möglich, Proben herzustellen bei denen $L < L_\varphi$ gilt. Man stellte fest, daß für diesen Bereich die Fluktuationen der *Spannung* ΔU unabhängig von Länge der Probe sind. Durch die Beziehung

$$\Delta G = \Delta\left(\frac{I}{U}\right) = \frac{I}{U^2}\Delta U = \frac{1}{IR^2} \propto \frac{1}{L^2}$$

ergibt sich sofort, daß die Leitfähikeitsschwankungen für kleiner werdendes L nicht mehr beschränkt sind und deshalb kaum noch als universell angesehen werden können. Wie $G(H)$ läßt sich auch $U(H)$ in einen symmetrischen Teil $U_S(H)$ und einen antisymmetrischen Teil $U_A(H)$ aufspalten. Die Fluktuationen des antisymmetrischen Teils erwiesen sich wieder als unababhängig von L, was wie oben dadurch erklärt werden kann, daß nur Fluktuationen in den Spannungsabgriffen beitragen. Die Fluktuationen des symmetrischen Teil zeigen für $L > L_\varphi$ die gleiche Abhängigkeit wie $\Delta U(H)$, d.h. $U_S \propto (L/L_\varphi)^{-1/2}$.

Bei $L < L_\varphi$ ist $\Delta U_S(H)$ konstant. Washburn erklärt die Unabhängigkeit von L durch die Einführung der effektiven Probenlänge

$$L_{eff} \simeq L + 4L_\varphi. \tag{12}$$

Da jedes Elektron eine gewisse Aufenthaltswahrscheinlichkeit innerhalb eines Volumens L_φ^d hat, reicht die Koheränz bis in die Spannungs– und Stromabgriffe hinein, d.h. die Probenlänge ist größer als nur der Abstand zwischen den Spannungsabgriffen. Wird nun L klein gegen L_φ, so wird L_{eff} von L_φ dominiert, und der Ausdruck (12) unabhängig von L.

Es ist offensichtlich, daß die Konstanz von $\Delta U_S(H)$ bei $L_{eff} \to 0$ zusammenbrechen muß, da mit L_{eff} auch die Spannung gegen null geht und die Fluktuation ΔU_S nicht größer als die Spannung selbst sein kann. Bei welcher Größenordnung dies geschieht, ist allerdings noch unklar.

8 Messungen

Literatur

[1] S.Washburn: IBM J.Res.Develp. Vol.**32**, S.335, 1988

[2] A.G.Aronov, Yu.V.Sharvin: Rev.Mod.Phys. Vol.**32**, S.755, 1987

[3] S.Washburn, R.A.Webb: Adv.Phys. Vol.**35** No.4, S.375, No.3 Part I, 1987

[4] S.Feng, P.A.Lee: Mesoscopic Conductors and Correlations in Laser Patterns (im Institut erhältlich)

[5] P.A.Lee: Physika **140** A, S.169, 1986

[6] Y.Imry: Europhys.Lett. Vol.**1**, S.249, 1986

[7] P.W.Anderson, D.J.Thouless, E.Abrahams, D.S.Fisher: Phys.Rev. B, Vol.**22**, Nr.8, S.3519, 1980

[8] D.J.Thouless: Phys.Rev.Lett. Vol.**39**, S.1167, 1977